

ЛУЧЕВЫЕ МЕТОДЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ВОЛНОВЫХ КАТАСТРОФ

А.С. Крюковский

АНО ВО «Российский новый университет», Москва, Россия
kryukovsky56@yandex.ru

RAY METHODS AND SPECIAL FUNCTIONS OF WAVE CATASTROPHES

A.S. Kryukovsky

Russian New University, Moscow, Russia
kryukovsky56@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены асимптотические методы решения задач дифракции, фокусировки и распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах: метод бихарактеристик и волновая теория катастроф. Методом бихарактеристик Гамильтона–Лукина выполнено математическое моделирование лучевых и каустических структур, возникающих при распространении радиоволн в ионосфере Земли. Приведены результаты математического моделирования каустических сечений основных, краевых и угловых волновых катастроф. Рассмотрены равномерные асимптотические решения волновых задач, приводящих к специальным функциям волновых катастроф, и представлены амплитудно-фазовые структуры специальных функций волновых катастроф.

Ключевые слова: распространение, радиоволны, ионосфера, бихарактеристики, фокусировка, дифракция, каустики, основные, краевые и угловые волновые катастрофы, асимптотики.

Abstract. Asymptotic methods for solving problems of diffraction, focusing and propagation of electromagnetic waves in inhomogeneous anisotropic media are considered: the bicharacteristic method and the wave catastrophe theory. Hamilton–Lukin’s bicharacteristic method was used to perform mathematical modeling of ray and caustic structures arising from the propagation of radio waves in the Earth’s ionosphere. The results of mathematical modeling of caustic sections of the main, edge and corner wave catastrophes are given. Uniform asymptotic solutions of wave problems leading to special functions of wave catastrophes are considered, and amplitude-phase structures of wave catastrophe special functions are presented.

Keywords: propagation, radio waves, ionosphere, bicharacteristics, focusing, diffraction, caustics, main, edge and corner wave catastrophes, asymptotics.

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, обеспечения дальней коротковолновой радиосвязи, при изучении структуры ионосферы Земли методами дистанционного зондирования и радиотомографии активно используются асимптотические методы. Лучевой подход является традиционным инструментом изучения распространения коротких волн в различных средах [Казанцев и др., 1967; Лукин, Спиридонов, 1969; Лукин, Палкин, 1982; Kryukovskii et al., 2012]. В теории дифракции и антенной технике таким лучевым подходом является геометрическая теория дифракции. При решении задач лучевыми методами возникают особенности решения: каустики и их сингулярности. Применение теории волновых катастроф позволяет перейти к корректному описанию полей в окрестности каустик и их особенностей, известных как волновые катастрофы [Kryukovskii et al., 2006; Крюковский и др., 2009]. Они возникают и играют важную роль при решении различных физических задач в радиофизике, акустике, оптике, квантовой механике и др. [Лукин, Палкин, 1982; Дорохина, 2007]. Ниже кратко изложены основы метода бихарактеристик и волновой теории катастроф (ВТК) и приведены результаты математического моделирования.

МЕТОД БИХАРАКТЕРИСТИК
ГАМИЛЬТОНА–ЛУКИНА

Для построения лучевых траекторий при исследовании распространения радиоволн в неоднородных, анизотропных диспергирующих средах и расчета

электромагнитных полей наиболее эффективной является расширенная бихарактеристическая система (1)–(2), сформулированная в работах Д.С. Лукина и его коллег [Казанцев и др., 1967; Лукин, Спиридонов, 1969; Kryukovskii et al., 2012], на основе системы Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \left(2c^2 \mathbf{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\left(2c^2 \mathbf{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\mathbf{r}_\eta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\left(2c^2 \mathbf{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}, \\ \frac{d\mathbf{k}_\zeta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\mathbf{k}_\eta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1)–(2) введены обозначения: t — групповое время; \mathbf{k} — волновой вектор; ω — круговая частота излучения; ε — эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения; \mathbf{r} — координаты луча; c — скорость света. Первая группа уравнений (1) — это уравнения для координат, а вторая группа уравнений — это уравнения для

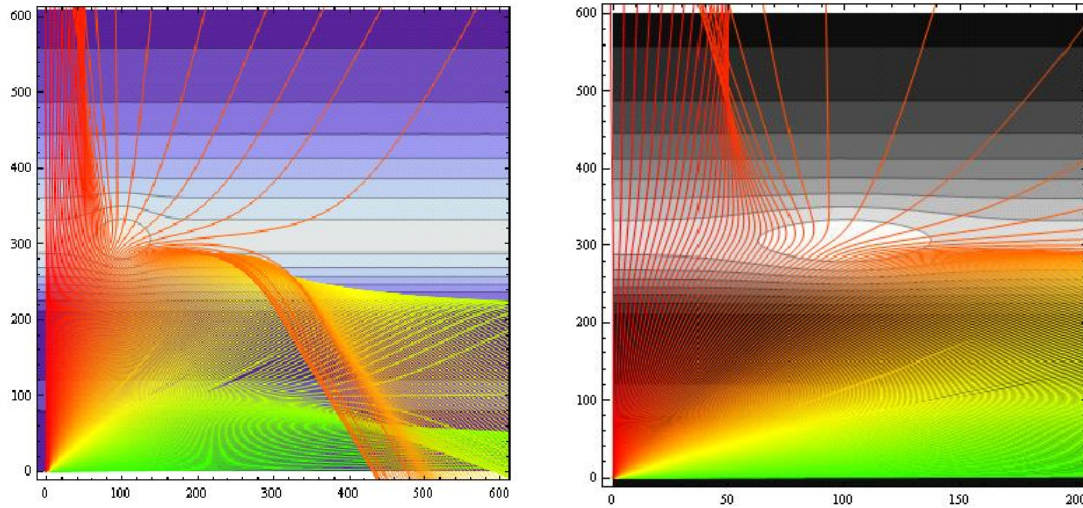


Рис. 1. Лучевые траектории. Неоднородность с повышенной электронной концентрацией расположена в максимуме ионосферного слоя. Панель б — фрагмент а

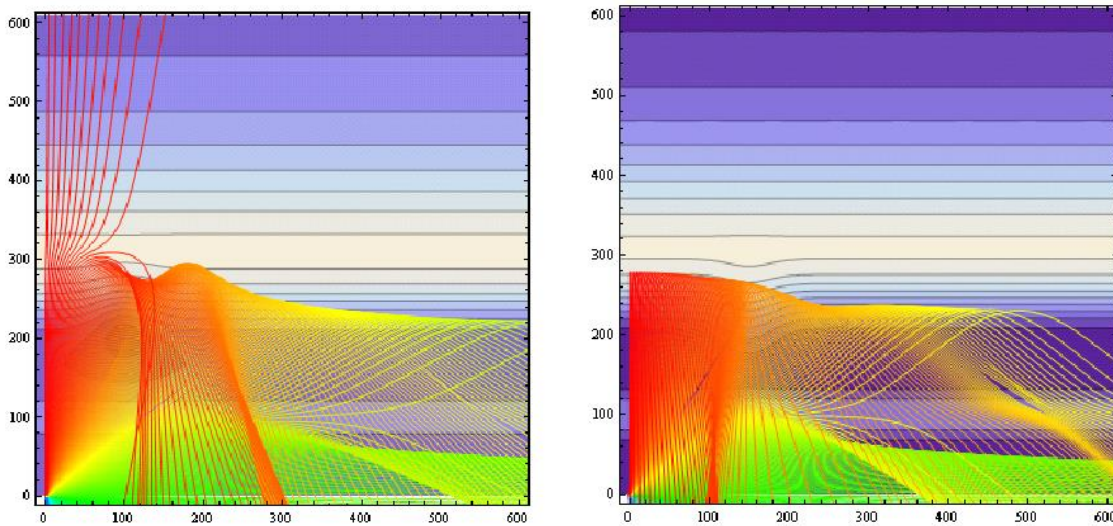


Рис. 2. Лучевые траектории: неоднородность с пониженной (а) и с повышенной (б) электронной концентрацией расположена ниже максимума ионосферного слоя

волновых векторов. Для решения задачи о распространении радиосигнала от источника (задача Коши) система (1)–(2) дополняется начальными условиями.

На рис. 1–3 представлены результаты численного моделирования. На рис. 1 в максимуме ионосферного слоя расположена крупномасштабная неоднородность с повышенной электронной концентрацией. Хорошо видны каустические особенности типа A_2 (гладкая каустика) и A_3 (каустическое острие), образованные как слоем F_2 , так и слоем E . Обращает внимание каустическое острие выше максимума слоя. Этот всплеск излучения легко может быть зарегистрирован на фоне слабого проходящего сигнала.

На рис. 2 показаны лучевые траектории в случае, когда неоднородности с пониженной (рис. 2, а) или с повышенной (рис. 2, б) электронной концентрацией расположены ниже максимума слоя F_2 .

Видно как неоднородность образует дополнительные каустические структуры, направленные в сторону поверхности земли.

На рис. 3 показана лучевая структура в случае, когда неоднородность с повышенной электронной

концентрацией расположена в максимуме слоя F_2 . Видно, что при таких параметрах задачи лучи многократно огибают неоднородность.

На рис. 4 показано расщепление лучевой траектории линейно частотно модулированного (ЛЧМ) радиосигнала в плоскости первоначального распространения необыкновенной волны (рис. 4, а) и в боковой плоскости (рис. 4, б). Угол луча выхода 30° . Рассмотрена модель ночной ионосферы [Kryukovskii et al., 2015; Бова и др., 2017]. Каждый луч соответствует определенной частоте. Низкочастотные лучи отражаются от слоев E и F_2 и возвращаются на землю, а высокочастотные проходят сквозь ионосферу. Лучи, проходящие ионосферный слой F_2 , в боковой плоскости разворачиваются параллельно оси z (рис. 4, б).

Ослабление сигнала определяется двумя факторами: поглощением и расходимостью. На рис. 5, а приведены графики поглощения, вычисленные вдоль траекторий. Для кривых, соответствующих проходящим лучам, поглощение мало. Лучи, отражающиеся от ионосферы, много времени проводят

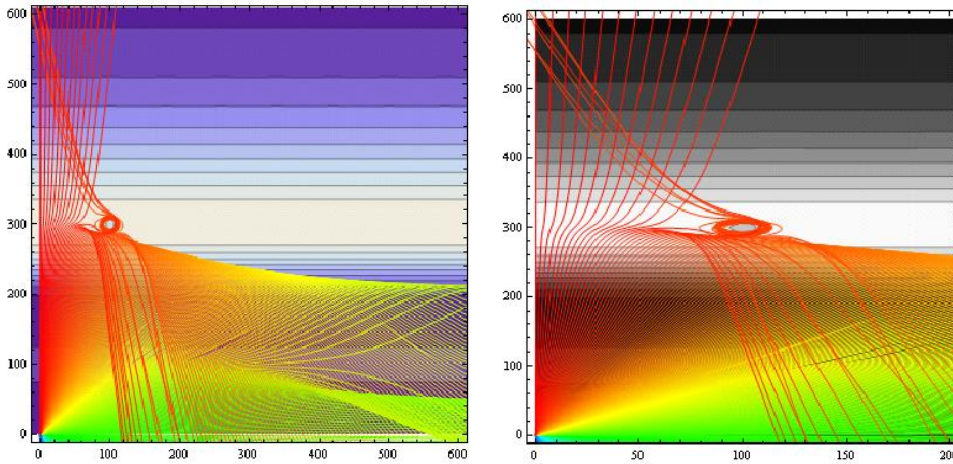


Рис. 3. Лучевые траектории. Неоднородность с пониженной электронной концентрацией расположена в максимуме ионосферного слоя. Панель b — фрагмент a

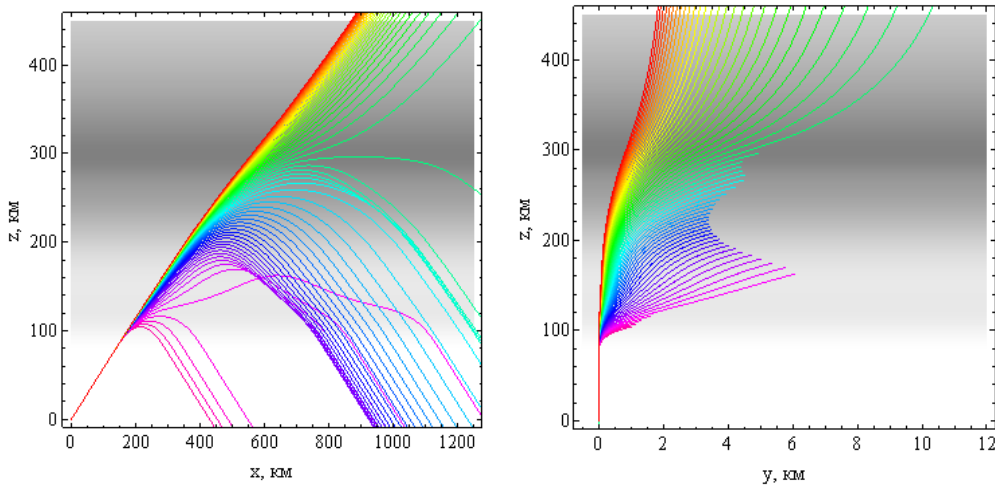


Рис. 4. Лучевые траектории в плоскости: a — (x, z) и в боковой плоскости b — (y, z)

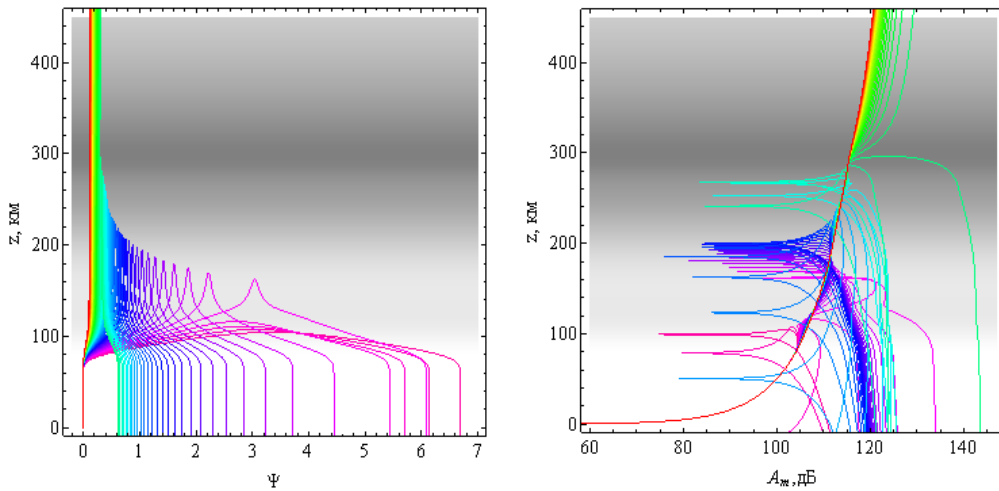


Рис. 5. Поглощение (a) и расходимость (b) вдоль лучевых траекторий

в нижней ионосфере и испытывают активное поглощение. С уменьшением частоты поглощение растёт.

На рис. 5, b показаны зависимости расходимостей вдоль лучевых траекторий от высоты [Бова и др., 2017].

Красная линия, соответствующая высокочастотному сигналу, имеет излом в окрестности максимума

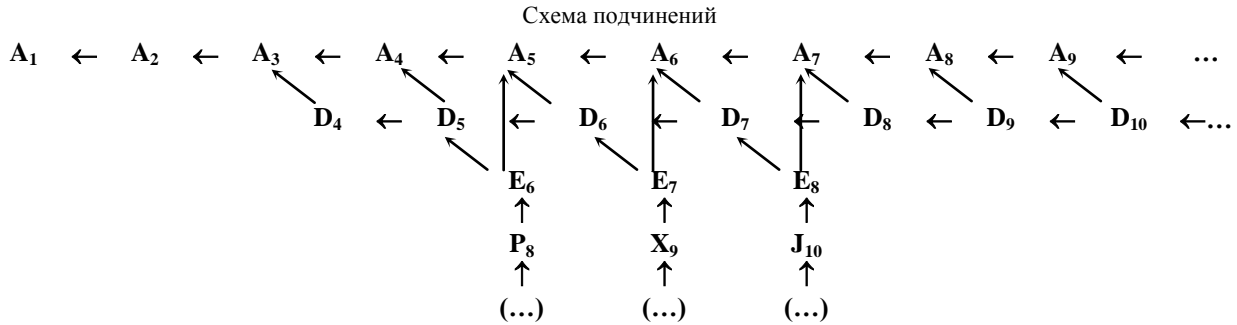
слоя F , что объясняется дефокусировкой сигнала. Горизонтальные линии, вдоль которых расходимости стремятся к нулю, соответствуют каустикам. Это области фокусировки. Лучи соответствующие дальнему распространению (лучи Педерсена), испытывают большую расходимость и наблюдаемость таких сигналов вызывает сомнения.

Таблица 1

Основные катастрофы

№	Тип Σ	Особый росток $\Phi_0^\Sigma(x, y, z, a)$	N	Ограничения на функциональный модуль a	$\dim a$	k	K
1	A_N	$\pm x^{N+1}, N > 0$	N	—	0	(0)1	$N+1$
2	D_4^\pm	$(1/3)x^3 \pm xy^2$	4	—	0	2	3
3	D_5	$x^4 + xy^2$	5	—	0	2	4
5	E_6^\pm	$x^4 \pm y^3$	6	—	0	2	4
6	E_7	$x^3y + y^3$	7	—	0	2	4
7	E_8	$x^5 + y^3$	8	—	0	2	5
8	X_9	$\pm x^4 + ax^2y^2 \pm y^4$	9	$a^2 \neq 4$ если “+” или “-”	1	2	4
10	J_{10}	$x^3 + ax^2y^2 \pm xy^4$	10	$a^2 \neq 4$ если “+”	1	2	5
12	Z_{11}	$x^3y + y^3 + axy^4$	11	—	1	2	5
13	P_8	$x^3 + ax^2z \pm xz^2 + y^2z$	8	$a^2 \neq 4$ если “+”	1	3	3
15	Q_{10}	$x^3 \pm y^4 + yz^2 + axy^3$	10	—	1	3	4
16	Q_{11}	$x^3 + y^2z \pm xz^2 + az^5$	11	—	1	3	5
17	S_{11}	$\pm x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$	11	—	1	3	4

Таблица 2



ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ (КАТАСТРОФЫ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ)

Опираясь на теорию особенностей дифференцируемых отображений [Арнольд и др., 1982, 1984], ВТК позволяет построить классификацию структурно устойчивых фокальных областей (см. табл. 1) и равномерные асимптотически решения в виде [Крюковский и др., 1984; Kryukovsky et al., 1987; Kryukovskii et al., 2006, 2009]:

$$U(\Lambda, \vec{q}) \cong \exp[i\Lambda\Theta(\vec{q})] \times \left[l_1 I^\Sigma(\vec{S}(\Lambda, \vec{q})) + \sum_{j=2}^N l_j \frac{\partial I^\Sigma(\vec{S})}{\partial S_{j-1}} \right], \quad (3)$$

$$\vec{S} = \left(\vec{\lambda}, \vec{a} \right),$$

где l_j — асимптотически сходящиеся ряды, а

$$I^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iF_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda})] d\vec{\xi} \quad (4)$$

специальная функция волновой катастрофы — СВК [Крюковskii, Lukin, 2003].

Для определения коэффициентов асимптотического разложения на основе амплитуды и фазы

подынтегрального выражения построены цепочки рекуррентных соотношений [Крюковskii, Lukin, 1998; Крюковский, 2013]. Универсальная деформация F_Σ в (4) имеет вид

$$F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda}) = \Phi_0^\Sigma(a, \xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{j=1}^L \lambda_j \varphi_j^\Sigma(\xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{j=1+k}^K \pm \xi_j^2, \quad (5)$$

где $\Phi_0^\Sigma(a, \xi_1, \dots, \xi_k)$ и $\varphi_j^\Sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ — это нормальная форма (особый росток) и возмущения. В табл. 1 k — это коразмерность особенности (катастрофы), K — k -определенность, а N — кратность.

Особенности, приведенные в табл. 1, связаны схемами подчинений (примыканий) (табл. 2):

Каждая старшая катастрофа содержит при малых «шевелениях» каустические структуры подчиненных особенностей.

На рис. 6 показаны характерные сечения каустик (толстая линия) и лучевые структуры некоторых основных катастроф в соответствии с их классификацией [Дорохина и др., 2007].

На рис. 7, а, б представлены линии равного уровня амплитуды и фазы СВК для гиперболической

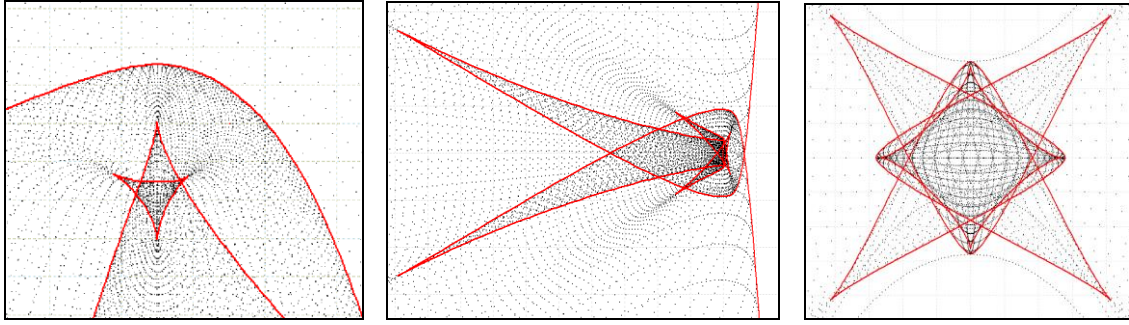


Рис. 6. Лучевая и каустическая структуры: простой катастрофы E_7 (а); унимодальной катастрофы J_9 (б) и трехмодальной катастрофы N_{25} (в)

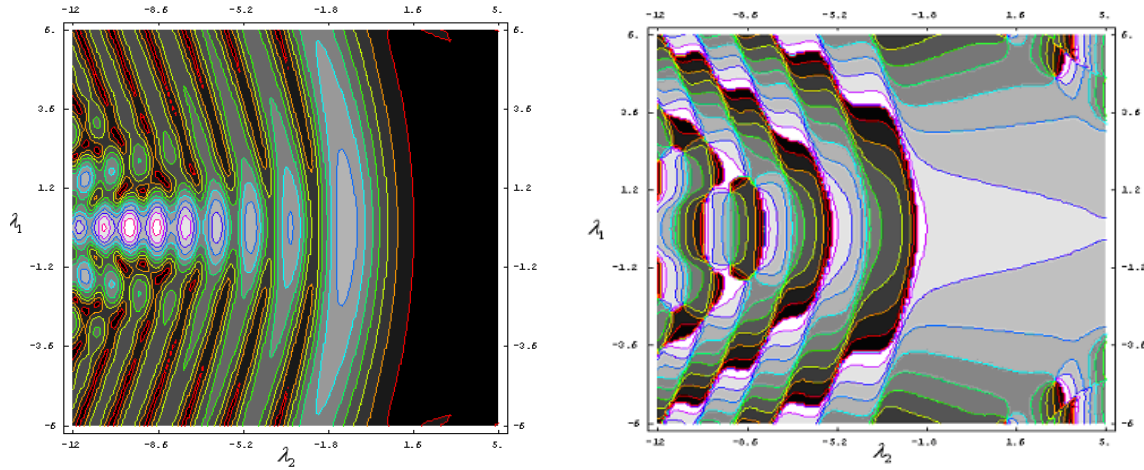


Рис. 7. Линии уровня СВК: амплитуды (а); фазы (б), соответствующие катастрофе D_4^+

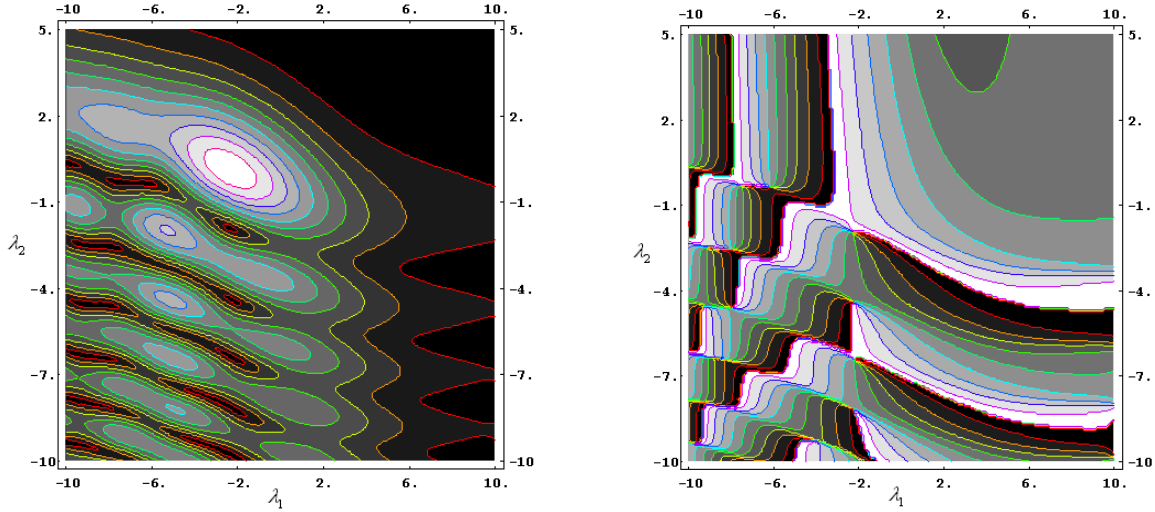


Рис. 8. Линии уровня СВК: амплитуды (а); фазы (б), соответствующие катастрофе $F_{1,0}$

омбилики (D_4^+) [Дорохина и др., 2007], универсальная деформация которой имеет вид

$$F_{D_4^+} = \frac{1}{3} \xi_1^3 + \xi_1 \xi_2^2 + \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \xi_1 + \lambda_3 \xi_2^2.$$

ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ КРАЕВЫХ И УГЛОВЫХ КАТАСТРОФ

При дифракции на телах с границами, когда первичные ГО лучевые семейства образуют семейства вторичных лучей, возникают краевые и угловые катастрофы. В работах [Kryukovsky et al., 1987;

Крюковский и др., 1988; Kryukovskii, Lukin, 1998; Крюковский, 2013] были построены равномерные асимптотические решения. При этом в отличие от (4) СВК краевых ($\kappa=1$) и угловых ($\kappa=2$) катастроф и имеют вид

$$\Gamma^{\pm} \left(\begin{matrix} \mathbf{r} \\ \lambda, \mathbf{a} \end{matrix} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \dots d\xi_{\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i F_{\Sigma} \left(\begin{matrix} \mathbf{r} \\ \xi, \mathbf{a}, \lambda \end{matrix} \right) \right] \times \\ \times d\xi_{\kappa+1} \dots d\xi_{\kappa}.$$

На рис. 8, а, б представлены линии равного уровня амплитуды и фазы СВК для унимодальной краевой

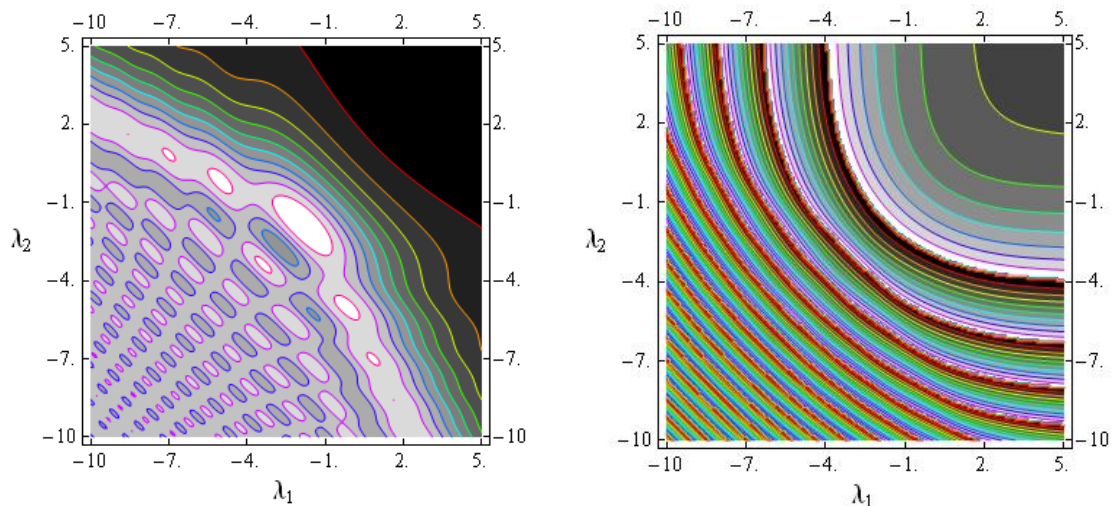


Рис. 9. Линии уровня СВК: амплитуды (а); фазы (б), соответствующие катастрофе A_1^4 ; $\varphi=2\pi/3$

катастрофы ($F_{1,0}$), а на рис. 9, а, б линии равного уровня амплитуды и фазы СВК для унимодальной угловой катастрофы A_1^4 [Дорохина и др., 2007].

Универсальная деформация имеет вид

$$F_{A_1^4} = \xi_1^2 + a\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2,$$

$$a \approx 2 \cos \varphi.$$

Такая особенность возникает при дифракции волны экраном с угловой точкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены метод бихарактеристик Гамильтона–Лукина и волновая теория катастроф, являющиеся асимптотическими методами решения задач дифракции, фокусировки и распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах. Выполнено численное моделирование лучевых и каустических структур, возникающих при распространении радиоволн в ионосферной плазме. Рассмотрены основные понятия теории основных, краевых и угловых волновых катастроф [Ипатов и др. 1986; Крюковский и др., 1995; Kryukovskii et al., 2006]. Помимо стационарных задач распространения, дифракции и фокусировки излучения, методы ВТК нашли применение при решении задач по распространению радио и видео импульсов в дисперсионных средах [Kryukovsky et al., 1999, Kryukovskii et al., 2015, Крюковский и др. 2007], при изучении метаматериалов [Kryukovskii, Orlov, 2010]. Полученные нами результаты моделирования представлены в информационной системе “wavecat.rosnou.ru” [Дорохина и др., 2007].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 18-02-00544-а, № 17-02-01183-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, часть I. 1982. 304 с.; часть II, 1984. 335 с
Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Моделирование распространения частотно-модулированного сигнала в ионосферной плазме с учетом отклоняющего поглоще-

ния и влияния внешнего магнитного поля // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6, № 4 (26). С. 34–45.

Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12, № 8. С. 71–75.

Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 4. С. 823–827.

Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.

Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт // ИРЭ АН СССР. М., 1984. 41 (413). 75 с.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. 199 с.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы // Доклады РАН. 1995. Т. 341, № 4. С. 456–459.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф и ее приложения к описанию фокусировки, дифракции и распространения волновых полей // Труды МФТИ (ГУ), 2009. Т. 1, № 2. С. 54–71.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12, № 8. С. 15–25.

Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.

Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14, № 9. С. 1673–1677.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S. Geometric Diffraction Theory Created by the Methods of Edge and Angle Catastrophes // Journal of Communications Technology and Electronics. 1998. V. 43, N 9. P. 971–986.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S. Theoretical calculation of reference focal and diffractive electromagnetic fields based on

wave catastrophe special functions // Journal of Communications Technology and Electronics. 2003. V. 48, N 8. P. 831–840.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Kir'yanova K.S. Method of Extended Bicharacteristic System in Simulating Wave Propagation in Ionospheric Plasma // Journal of Communications Technology and Electronics. 2012. V. 57, N 9. P. 1039–1045.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Palkin E.A., Rastyagaev D.V. Wave catastrophes: Types of focusing in diffraction and propagation of electromagnetic wave // Journal of Communications Technology and Electronics. 2006. V. 51, N 10. P. 1087–1125.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V. Construction of Uniform Asymptotic Solutions of Wave-Type Differential Equations by Methods of Catastrophe Theory // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. V. 16, N 2. P. 232–245.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V., Skvortsova Y.I. Mathematical simulation of propagation of frequency-modulated radio waves in ionospheric plasma // Journal of Communications Technology and Electronics. 2015. T. 60, N 10. P. 1049–1057.

Kryukovskii A.S., Orlov A.V. Singularities of ray and caustic structures of electromagnetic waves in metamaterials // Journal of Communications Technology and Electronics. 2010. V. 55, N 3. P. 270–277.

Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A. Uniform Asymptotics for Evaluating Oscillatory Edge Integrals by Methods of Catastrophe Theory // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modeling. 1987. V. 2, N 4. P. 279–312.

Kryukovsky A.S., Rastyagaev, D.V., Vergizaev I.A. Three-Dimensional Space-Time Focusing of Catastrophe Wave Fields. // Journal of Communications Technology and Electronics. 1999. V. 44, N 4. P. 423–430.