

**ДИНАМИКА НЕОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР  
СОЛИТОННОГО И ВИХРЕВОГО ТИПОВ В КОМПЛЕКСНЫХ СРЕДАХ  
С ДИСПЕРСИЕЙ. ТЕОРИЯ, МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПРИЛОЖЕНИЯ**

**В.Ю. Белашов**

**DYNAMICS OF MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR WAVE STRUCTURES  
OF SOLITON AND VORTEX TYPES IN DISPERSIVE COMPLEX MEDIA.  
THEORY, SIMULATION, APPLICATIONS**

**V.Yu. Belashov**

Представлены результаты теоретических и численных исследований структуры и динамики 2D- и 3D-солитонов и нелинейных волн, описываемых уравнениями классов Кадомцева–Петвиашвили, 3-DNLS, а также вихревых систем, описываемых уравнениями эйлерового типа. Рассматриваются обобщения, относящиеся к комплексным физическим средам, учитывающие высшие дисперсионные поправки, диссипацию, неустойчивости и стохастические флуктуации соответствующих волновых полей. Особое внимание уделено приложениям теории в различных областях современной физики, включая физику плазмы, гидродинамику и физику верхней атмосферы.

The results of theoretical and numerical study of the structure and dynamics of 2D and 3D solitons and nonlinear waves described by Kadomtsev–Petviashvili, 3-DNLS classes of equations and also the vortex systems described by Euler-type equations are presented. The generalizations (relevant to various complex physical media), accounting for high-order dispersion corrections, dissipation, instabilities, and stochastic fluctuations of the wave fields are considered. Special attention is paid to the applications of the theory in different fields of modern physics including plasma physics, hydrodynamics and physics of the upper atmosphere.

**Введение**

В настоящей работе в виде краткого обзора представлены основные результаты по теоретическому и численному исследованию динамики 2D и 3D нелинейных волновых структур солитонного и вихревого типов, описываемой уравнениями класса Кадомцева–Петвиашвили (КП), обобщенными на случай переменной в пространстве и во времени дисперсии, с учетом дисперсионных эффектов высшего порядка, процессов диссипации и стохастических флуктуаций волнового поля, уравнениями типа 3-DNLS и системой дифференциальных уравнений эйлерового типа. Такие объекты интересны тем, что их изучение играет важную роль как при исследовании общей динамики волновых образований, так и при моделировании нелинейных волновых процессов в верхней атмосфере (ионосфере) и гидросфере, а также при исследовании распространения волновых структур в замагниченной плазме. Актуальность данной тематики определяется существующими проблемами теории неодномерных нелинейных волн и вихревых образований в средах с дисперсией, той ролью, которую могут играть волновые процессы гидродинамического типа в диспергирующих средах (в том числе в атмосфере и гидросфере Земли и в плазме ионосферы и магнитосферы), а также необходимостью учета, в отличие от классических моделей, эффектов, свойственных реальным средам.

Предметом нашего обсуждения будет одна из наиболее интересных и быстро развивающихся областей современной нелинейной физики и математики – теоретическое и численное исследование динамики неодномерных нелинейных структур солитонного и вихревого типов, описываемых обобщенными уравнениями КП (GKP), уравнением Шредингера с производной нелинейного члена (DNLS) и уравнениями эйлерового класса. Рассматриваемые обобще-

ния относятся, в первую очередь, к различным комплексным физическим средам, где необходимо учитывать дисперсионные поправки высшего порядка, влияние диссипации и неустойчивости. Будут также представлены некоторые новые результаты, связанные с приложениями теории в физике плазмы (включая ионосферную и магнитосферную плазму), гидродинамике и динамике атмосферы.

**Классы нелинейных GKP- и DNLS-моделей**

В качестве исходных, считая дисперсию пренебрежимо малой, будем рассматривать следующую систему уравнений гидродинамики с граничными условиями [Белашов, 1997]:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + (c^2 / \rho) \nabla \rho = 0, \quad \partial_t \rho + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0;$$

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{c^2 (\rho - \rho_0)}{2\rho} + \frac{c^2 z}{\rho} = 0, \quad \Delta \Phi = 0; \quad (1)$$

$$\partial_t \eta + \partial_x \eta \partial_x \Phi + \partial_y \eta \partial_y \Phi - \partial_z \Phi = 0;$$

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + (c^2 / \rho) \eta = 0;$$

$$z = \eta(x, y, t), \quad \partial_z \Phi \Big|_{z=-\rho_0} = 0,$$

где введены понятия обобщенных плотности  $\rho$  и скорости «звука»  $c(\rho)$  в пренебрежении дисперсией. Система (1), в зависимости от смысла, который мы придаем входящим в нее функциям и переменным, описывает:

- волны на поверхности жидкости:  $\rho \equiv H$  – имеет смысл глубины жидкости,  $c(\rho) = c_0 = \sqrt{gH}$  – фазовая скорость волн малой амплитуды;
- ионно-звуковые волны в плазме:  $\rho$  – плотность газа,  $c(\rho) = c_0 = c_s = \sqrt{T_e / m}$  – скорость ионного «звука»;
- быстрые магнитозвуковые (БМЗ) волны в за-

магнитной плазме:  $\rho \equiv B$  – имеет смысл магнитного поля волны,  $c(\rho) = c(B) = v_A = B / \sqrt{4\pi n m}$  – альфвеновская скорость;  $n$  – концентрация электронов,  $m = m_e + m_i$  – сумма масс плазменных компонентов – электрона и иона.

Остальные обозначения стандартные. Первые два уравнения – это уравнения движения и непрерывности для обобщенных скорости и плотности соответственно. Для волн на мелкой воде  $\mathbf{v}$  – скорость частиц («массовая» скорость), для ионно-звуковых волн – скорость ионного «звука», для МЗ-волн  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{h} = \mathbf{H}_- / \mathbf{H}_0$  – безразмерное магнитное поле ( $\mathbf{H}_-$  – магнитное поле волны). Следующие два уравнения – уравнения для потенциала (движение газа предполагается потенциальным:  $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ ), последние четыре соотношения – граничные условия, где, например, для жидкости третье и четвертое соотношения могут быть интерпретированы соответственно как уравнение поверхности жидкости и граничное условие на дне, т. е. при  $z = -H$ .

Таким образом, будем осуществлять общий подход, отвлекаясь от конкретного вида среды, т. е. будем в дальнейшем работать с обобщенными уравнениями.

Используя разложение по степеням малых параметров, как это сделано в [Белашов, 1997; Belashov, 2005], можно получить следующее обобщенное уравнение:

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = \mathfrak{K}, \quad (2)$$

в котором, например, для волн на поверхности жидкости

$$\alpha = 3c_0 / 2H,$$

$$c_0 = (gH)^{1/2},$$

$$\mathfrak{K} = -(c_0 / 2) \nabla_{\perp} w, \quad \partial_x w = \nabla_{\perp} u;$$

$$\beta = \frac{c_0}{6} \left( \frac{3\sigma}{\rho g} - H^2 \right).$$

Отметим, что когда  $H \rightarrow (3\sigma/\rho g)^{1/2}$ , дисперсия в среде как бы исчезает, и чтобы учесть этот «нефизичный» эффект, необходимо удержать следующий по порядку член в разложении полного дисперсионного уравнения по  $k$ , в функционале  $\mathfrak{K}[u]$  появляется при этом дисперсионная поправка  $-\gamma \partial_x^5 u$ , где коэффициент

$$\gamma = (c_0 / 6) \left[ H^2 \left( \frac{2}{5} H^2 - \sigma / \rho g \right) - \frac{1}{12} (3\sigma / \rho g - H^2)^2 \right].$$

Для БМЗ-волн в замагнитной плазме, возбуждаемых при  $B_0^2 \gg 8\pi n T$  в области частот  $\omega \ll \omega_{Bi}$ , в уравнении (2)  $\mathfrak{K} = \kappa \nabla_{\perp} w$ ,  $\partial_x w = \nabla_{\perp} u$  и дисперсионный коэффициент имеет вид  $\beta = v_A (c^2 / 2\omega_{0i}^2) (\cot^2 \theta - m_e / m_i)$ . Понятно, что когда угол между волновым вектором и магнитным полем  $\theta \rightarrow \arctan(m_i / m_e)^{1/2}$ , имеет место аналогичная ситуация, и функционал  $\mathfrak{K}[u]$  в (2) должен быть дополнен членом  $-\gamma \partial_x^5 u$ , с коэффициентом дисперсии следующего порядка

$$\gamma = v_A (c^4 / 8\omega_{0i}^4) \times \left[ 3 (m_e / m_i - \cot^2 \theta)^2 - 4 \cot^4 \theta (1 + \cot^2 \theta) \right].$$

При учете диссипативных эффектов в среде могут иметь место два случая. Если затухание Ландау мало, тогда в дисперсионном соотношении появляется поправка  $-iv k_x^2$ , оно приобретает вид:  $\omega = c_0 k (1 - i\mu k - \beta k^2 / c_0)$  и, следовательно, в правой части (2) добавочный член  $\mathfrak{K}[u] = v \partial_x^2 u$ , где, как показано в [Белашов, 1997; Belashov, 2005], например, для ионно-звуковых волн в плазме без магнитного поля коэффициент

$$v = (\rho_0 / 2\rho) (c_{\infty}^2 - c_0^2) \tau \int_0^{\infty} \xi \varphi(\xi) d\xi$$

имеет смысл коэффициента релаксационного затухания «звуковых» колебаний, а  $c_{\infty}$  и  $c_0$  представляют собой скорости соответственно высокочастотного и низкочастотного «звука» (последняя совпадает с  $c_s = (T_e / m)^{1/2}$ ); функция  $\varphi(t, \tau)$  определяет релаксационный процесс. Если же для ионно-звуковых волн в плазме существенным является затухание Ландау, то диссипация может быть учтена введением в правую часть (2) интегрального члена [Белашов, 1997; Belashov, 2005]:

$$\mathfrak{K}[u] = -\hat{L}[u] = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |k| \int_{-\infty}^{\infty} u(x') e^{ik(x-x')} dx',$$

где  $\sigma = c_0 (\pi m / 8M)^{1/2}$ . В этом случае закон дисперсии примет вид  $\omega = c_0 k (1 - i\sigma |k| / c_0 - \beta k^2 / c_0)$ . Здесь мы ограничимся гидродинамическим приближением, когда, например, для плазмы  $\omega \ll \omega_{0e}$ , т. е. обратный временной масштаб ионных колебаний много меньше электронной плазменной частоты  $\tau^{-1} \ll (4\pi n_0 e^2 / m)^{1/2}$  (в этом случае для  $T_e \gg T_i$  затухание Ландау пренебрежимо мало).

С учетом всех рассмотренных эффектов можно записать обобщенное уравнение КП (уравнение GKP) в следующем виде:

$$\partial_x (\partial_t u + \alpha u \partial_x u - v \partial_x^2 u + \beta \partial_x^3 u + \gamma \partial_x^5 u) = \kappa \Delta_{\perp} u, \quad (3)$$

что соответствует в линейном приближении дисперсионному соотношению

$$\omega \approx c_0 k_x \times \left[ 1 + k_{\perp}^2 / 2k_x^2 - iv k_x / c_0 + (-\beta k_x^2 + \gamma k_x^4) / c_0 \right].$$

Обобщим теперь (3) на еще один класс моделей, описывающих другую ветвь колебаний – альфвеновские волны. Следуя [Белашов, 2002], запишем модифицированную GKP+DNLS модель в виде

$$\partial_t u + \hat{A}(t, u)u = f, \\ f = \kappa \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} u dx, \quad \Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2.$$

Данная модель описывает два класса систем:

– уравнения класса GKP, если

$$\hat{A}(t, u) = \alpha u \partial_x - \partial_x^2 (v - \beta \partial_x - \gamma \partial_x^3),$$

тогда она приобретает вид, аналогичный (3):

$$\partial_{\eta} \left( \partial_x u + a u \partial_{\eta} u - v \partial_{\eta}^2 u + \beta \partial_{\eta}^3 u + \gamma \partial_{\eta}^5 u \right) = \kappa \Delta_{\perp} u,$$

$$\Delta_{\perp} = \partial_{\zeta_1}^2 + \partial_{\zeta_2}^2;$$

– уравнения класса DNLS, если

$$\hat{A}(t, u) = 3s |p|^2 u^2 \partial_x - \partial_x^2 (i\lambda + v),$$

где  $u = h = (B_y + iB_z) / 2B_0 |1 - \beta|^{1/2}$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{B}_{\perp} / B_0$ ,  $p = (1 + ie)$ .

В этом случае модель приобретает вид трехмерного обобщенного уравнения DNLS – 3-DNLS:

$$\partial_t h + s \partial_x \left( |h|^2 h \right) - i\lambda \partial_x^2 h - v \partial_x^2 h = \sigma \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} h dx.$$

Обе модели не являются в математическом смысле полностью интегрируемыми, аналитически мы можем только выполнить анализ устойчивости неодномерных решений – на основе метода исследования трансформационных свойств гамильтониана соответствующей системы [Belashov, 2005], и качественный и асимптотический анализ неодномерных решений: построить классификацию решений в  $(n-1) \times d$ -фазовом пространстве и по характеру асимптотик [Белашова, 2006].

**Анализ устойчивости неодномерных решений**  
Уравнение GKP запишем в гамильтоновском виде

$$\partial_t u = \partial_x (\delta \mathcal{H} / \delta u)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \int \left[ -(\varepsilon/2) (\partial_x u)^2 + (\lambda/2) (\partial_x^2 u)^2 + (\nabla_{\perp} \partial_x v)^2 / 2 - u^3 \right] d\mathbf{r},$$

имеющим смысл энергии системы. Рассмотрим вариационную задачу:  $\delta(\mathcal{H} + vP_x) = 0$ ,  $P_x = \frac{1}{2} \int u^2 d\mathbf{r}$ .

Такая запись означает, что все финитные решения есть стационарные точки гамильтониана  $\mathcal{H}$  при фиксированной проекции импульса  $P_x$ . Задача устойчивости состоит в том, что, в соответствии с теоремой Ляпунова, в динамической системе точки, которые отвечают минимуму или максимуму  $\mathcal{H}$ , являются абсолютно устойчивыми. Рассмотрим деформации  $\mathcal{H}$ , сохраняющие проекцию импульса  $P_x$ :

$$u(x, \mathbf{r}_{\perp}) \rightarrow \zeta^{-1/2} \eta^{(1-d)/2} u(x/\zeta, \mathbf{r}_{\perp}/\eta).$$

Гамильтониан уравнения GKP, как функция деформационных переменных, приобретает вид

$$\mathcal{H}(\zeta, \eta) = a\zeta^{-2} + b\zeta^{-2}\eta^{-2} - c\zeta^{-1/2}\eta^{(1-d)/2} + e\zeta^{-4},$$

где

$$a = -(\varepsilon/2) \int (\partial_x u)^2 d\mathbf{r},$$

$$b = (1/2) \int (\nabla_{\perp} \partial_x v)^2 d\mathbf{r},$$

$$c = \int u^3 d\mathbf{r}, \quad e = (\lambda/2) \int (\partial_x^2 u)^2 d\mathbf{r}.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\partial_{\zeta} \mathcal{H} = 0, \quad \partial_{\eta} \mathcal{H} = 0. \quad (4)$$

Достаточное условие минимума гамильтониана:

$$\left| \begin{array}{cc} \partial_{\zeta}^2 \mathcal{H}(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\zeta_1 \zeta_2}^2 \mathcal{H}(\zeta_i, \eta_j) \\ \partial_{\zeta_1 \zeta_2}^2 \mathcal{H}(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\eta}^2 \mathcal{H}(\zeta_i, \eta_j) \end{array} \right| > 0, \quad (5)$$

$$\partial_{\zeta}^2 \mathcal{H}(\zeta_i, \eta_j) > 0.$$

Совместное решение (4), (5) позволяет получить результаты, представленные на рис. 1, 2. Таким образом, мы доказали возможность существования в GKP модели абсолютно и локально устойчивых решений, условия устойчивости 2D- и 3D-солитонных решений представлены в [Белашов, 2002].

Для исследования устойчивости решений уравнения 3-DNLS оно также записывается в гамильтоновском виде [Belashov, 2005]:

$$\partial_t h = \partial_x (\delta \mathcal{H} / \delta h)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} |h|^4 + \lambda s h h^* \partial_x \varphi + \frac{1}{2} \sigma (\nabla_{\perp} \partial_x w)^2 \right] d\mathbf{r},$$

$$\partial_x^2 w = h, \quad \varphi = \arg(h).$$

Вариационная задача формулируется следующим образом:

$$\delta(\mathcal{H} + vP_x) = 0, \quad P_x = \frac{1}{2} \int |h|^2 d\mathbf{r}.$$

Как и в предыдущем случае, все финитные решения есть стационарные точки гамильтониана при фиксированной проекции импульса  $P_x$ . Решая задачу устойчивости, рассмотрим деформации  $\mathcal{H}$ , сохраняющие проекцию импульса  $P_x$ :

$$h(x, \mathbf{r}_{\perp}) \rightarrow \zeta^{-1/2} \eta^{-1} h(x/\zeta, \mathbf{r}_{\perp}/\eta), \quad \zeta, \eta \in \mathbb{C}.$$

Гамильтониан уравнения 3-DNLS приобретает вид

$$\mathcal{H}(\zeta, \eta) = a\zeta^{-1}\eta^{-2} + b\zeta^{-1} + c\zeta^2\eta^{-2},$$

где

$$a = (1/2) \int |h|^4 d\mathbf{r}, \quad b = \lambda s \int h h^* \partial_x \varphi d\mathbf{r},$$

$$c = (\sigma/2) \int (\nabla_{\perp} \partial_x w)^2 d\mathbf{r}.$$

Анализ ограниченности гамильтониана  $\mathcal{H}$  выполнялся аналогично случаю GKP. Доказана возможность существования в модели 3-DNLS абсолютно и локально устойчивых 3D-решений и получены условия устойчивости (т. е. области значений коэффициентов уравнения) [Белашов, 2002].

**Асимптотики и структура 2D-решений уравнений GKP-класса**

Асимптотики решений уравнений GKP-класса были подробно исследованы в работе [Белашова, 2006] для функции  $w = u(\eta, \zeta, t) / V$ . При этом было получено – для случаев  $V > 0$ ,  $\gamma = -1$  и  $V < 0$ ,  $\gamma = -1$ :

$$w = A_1 \exp \left\{ (2\gamma)^{-1/2} \left[ C^2 + \sqrt{C^4 \pm 4\gamma} \right]^{1/2} \chi \right\},$$

т. е. решения экспоненциально затухают на  $\pm\infty$ ;

– для случая  $V < 0$ ,  $\gamma = 1$ :

$$w = A_2 \exp \left\{ \left( 2C^{-1}\gamma^{-1/2} \right)^{-1} \left( 2C^{-2}\gamma^{1/2} - 1 \right)^{1/2} \chi \right\} \times \cos \left\{ \left( 2C^{-1}\gamma^{-1/2} \right)^{-1} \left( 2C^{-2}\gamma^{1/2} + 1 \right) \chi + \Theta \right\},$$

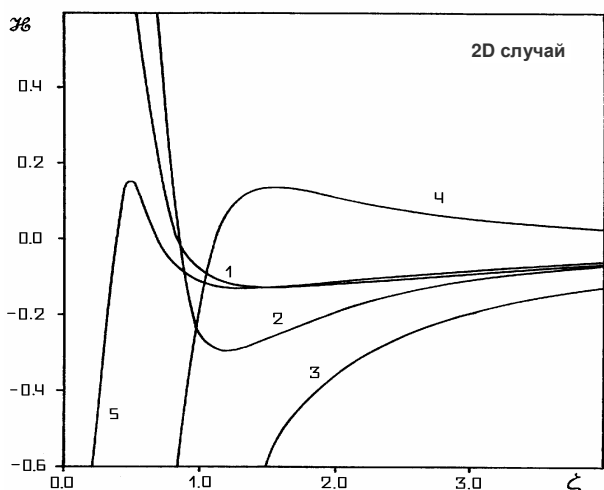


Рис. 1. Изменение  $\mathcal{H}(\zeta, \eta)$  при  $d=2$  для различных значений интегральных коэффициентов вдоль линий.

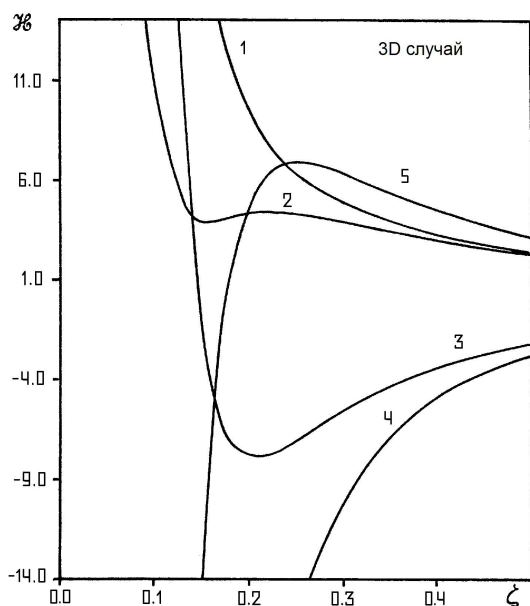


Рис. 2. Изменение  $\mathcal{H}(\zeta, \eta)$  при  $d=3$  для различных значений интегральных коэффициентов вдоль линий  $\eta=(2b/c)\zeta^{5/2}$ .

где  $A_1, A_2$  и  $\Theta$  – произвольные постоянные,  $C=|V|^{-1/4}$ ,  $\chi=(\eta \pm \zeta + (\kappa - V)t)$ , т. е. асимптотики являются затухающими осцилляторными.

Таким образом, было установлено, что в зависимости от знаков  $V$  и  $\beta$  уравнение GKP может иметь 2D-солитонные решения с монотонными и осциллирующими асимптотиками. На рис. 3 показан общий вид таких решений, полученный при компьютерном моделировании.

**Взаимодействие 2D-солитонов уравнения GKP**

При исследовании взаимодействия 2D-солитонов уравнения GKP использовались специально развитые методы численного интегрирования, основанные на конечно-разностных и спектральных подходах [Belashov, 2005]. В многочисленных сериях компьютерных экспериментов было установлено, что при некоторых значениях дисперсионных коэффициентов могут наблюдаться тривиальные, аналогичные 2D-солитонам уравнения КП,

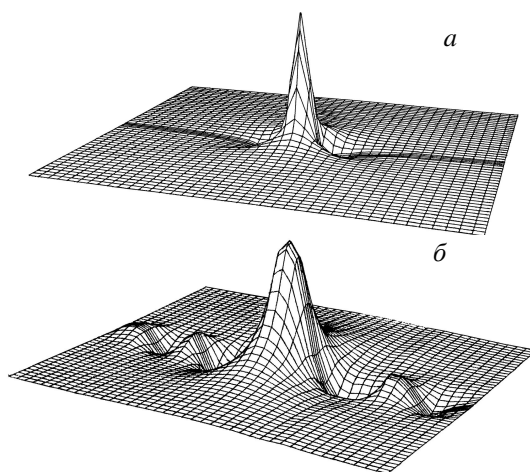


Рис. 3. Общий вид 2D-решений уравнения GKP:  $\gamma=1, \beta=-0.8(t=0.2)$  (а);  $\gamma=1, \beta=3.16(t=0.5)$  (б).

случаи взаимодействия; при некоторых же значениях параметров уравнения (следовательно, среды распространения) может иметь место совершенно нетривиальный (и невозможный в «классической» модели КП) случай формирования устойчивых солитонных пар (связанных состояний) – так называемых bi-солитонов (рис. 4).

При исследовании влияния диссипации в среде на эволюцию и структуру 2D-солитонов уравнение GKP записывалось в виде

$$\partial_{\eta}(\partial_{\eta}u + au\partial_{\eta}u - v\partial_{\eta}^2u + \beta\partial_{\eta}^3u + \gamma\partial_{\eta}^5u) = \kappa\Delta_{\perp}u$$

и интегрировалось численно. Примеры некоторых результатов представлены на рис. 5, 6. Из рисунков можно видеть, что диссипация в системе, наряду с общим затуханием амплитуды волнового поля, непосредственно влияет на структуру 2D-солитонов. Во всех случаях наблюдались: эффект удлинения солитонного «хвоста», уменьшение частоты осцилляций и гашение колебаний позади главного максимума, а также несимметричные изменения интегралов  $P$  и  $\mathcal{H}$  во фронтальной и задней «кавернах» (где  $u < 0$ ).

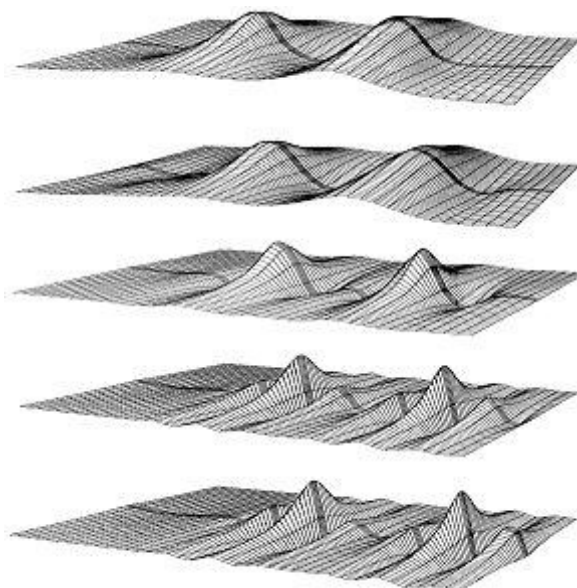


Рис. 4. Формирование 2D-бисолитона при  $u_1(0)=1.35, u_2(0)=1.3, \Delta\chi(0)=6$ . Сверху вниз:  $t=0; t=0.3; t=0.6; t=0.9; t=1.3$ .

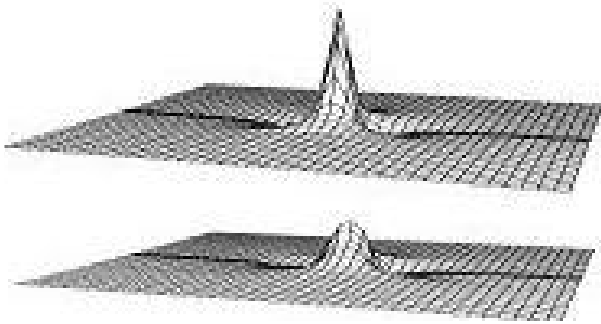


Рис. 5. Эволюция 2D-солитона:  $v=1$ ,  $\beta, \gamma > 0$ : вверху –  $t=0$ ; внизу –  $t=0.1$ .

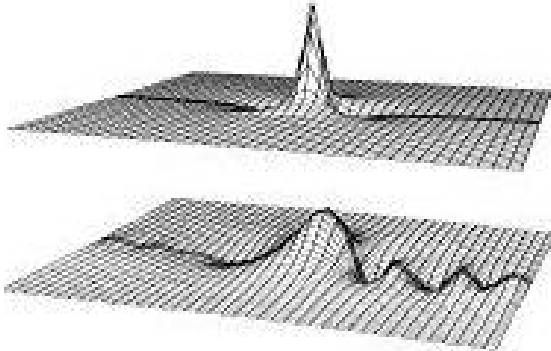


Рис. 6. Эволюция 2D-солитона:  $v=1$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$ : вверху –  $t=0$ ; внизу –  $t=0.2$ .

#### Некоторые приложения модели GKP

В работах [Белашов, 1997, 2002, 2003; Belashov, 2005; Белашова, 2006] были исследованы многочисленные приложения модели уравнений класса GKP в физике реальных сред с дисперсией, в частности:

- динамика ионно-звуковых и быстрых магнитозвуковых (БМЗ) волн в плазме (ионосфера и магнитосфера Земли, астрофизика, включая релятивистский предел);
- динамика солитонов на поверхности «мелкой» жидкости (гравитационные и гравитационно-капиллярные волны, волны цунами);
- уединенные волновые возмущения в атмосфере и ионосфере, генерируемые импульсными источниками (сейсмические процессы, фронты солнечного затмения и солнечного терминатора, мощные искусственные взрывы – возможность идентификации и пеленгации источников);
- эволюция в средах с переменной дисперсией (волны в жидкости, волны в плазме).

Рассмотрим кратко некоторые основные результаты, относящиеся к динамике неоднородных нелинейных волн в плазме.

**Ионно-звуковые волны в плазме без магнитного поля** описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -(e/m_i) \nabla \phi, \\ \partial_t n_i + \text{div} (n_i \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение дисперсии для ионного звука:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 / (1 + D^2 k^2),$$

где  $D$  – дебаевский радиус. При выполнении условий  $kD \ll 1$ ,  $k_x^2 \gg k_\perp^2$ ,  $v_x \ll c_s$  из (6) можно полу-

чить уравнение [Белашов, 1997]

$$\partial_x (\partial_t v + c_s \partial_x v - c_s \delta^2 \partial_x^3 v + v v_x) = \pm (c_s / 2) \Delta_\perp v,$$

совпадающее по форме с уравнение КП:

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = \kappa \int_{-\infty}^x \Delta_\perp u dx, \quad (7)$$

$$\Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2,$$

где

$$\alpha = \frac{3}{2} c_s / n_i, \quad \kappa = c_s / 2, \quad \beta = c_s D^2 / 2,$$

$$c_s = \sqrt{T_e / m_i}, \quad D^2 = T / 4\pi n_0 e^2.$$

Моделирование уравнения (7) при периодических граничных условиях и начальном условии, отвечающем импульсному возмущению  $u(0, x, y) = u_0 \exp[-(x/l_x + y/l_y)^2 / L^2]$ , позволило исследовать эволюцию 2D-ионно-звукового солитона (случай отрицательной дисперсии в уравнении КП) [Belashov, 2005].

**Нелинейные эффекты при распространении в замагниченной плазме БМЗ волн**, которые возбуждаются при  $\beta \equiv 4\pi n T / B^2 \ll 1$  в области частот  $\omega < \omega_B = eB / m_i c$ , при условиях

$$k \lambda_D \ll 1, \quad k_x^2 \gg k_\perp^2, \quad v_x \ll c_A = B^2 / 4\pi n m_i,$$

когда справедливо дисперсионное соотношение

$$\omega \approx c_A k_x (1 + k_\perp^2 / k_x^2 + \chi(\theta) \lambda_D^2 k_x^2),$$

исследовались ([Белашова, 2006] и многочисленные ссылки там) аналитически и численно. При достаточно высокой температуре ионов ( $\beta > m_e / m_i$ ) «длиная» дисперсия:

$$\chi(\theta) \lambda_D^2 = (c^2 / 2\omega_{0i}^2) \cot^2 \theta - \frac{1}{2} \rho^2 (3 - \frac{11}{4} \sin^2 \theta),$$

где  $\rho = v_{Ti} / \omega_B$  – ионный ларморовский радиус. Если  $\beta = 4\pi n T / B^2 < m_e / m_i$ , структура БМЗ-волн зависит от знака дисперсионного коэффициента

$$\gamma_1 = -c_A \chi(\theta) \lambda_D^2 = c_A (c^2 / 2\omega_{0i}^2) (m_e / m_i - \cot^2 \theta).$$

При этом вблизи конуса углов, где дисперсия меняет знак, т. е.  $|\pi/2 - \theta| \leq (\beta/4)^{1/2}$ ,  $\gamma_1 \rightarrow 0$ , что приводит к появлению в дисперсионном уравнении члена, пропорционального пятой следующей степени разложения полного дисперсионного соотношения по  $k$ , т. е.  $\gamma_2 k_x^5$ , с коэффициентом

$$\begin{aligned} \gamma_2 = c_A (c^4 / 8\omega_{0i}^4) \left[ 3 \left( m_e / m_i - \cot^2 \theta \right)^2 - \right. \\ \left. - 4 \cot^4 \theta (1 + \cot^2 \theta) \right] \end{aligned}$$

и в итоге получается уравнение GKP вида

$$\begin{aligned} \partial_x \left( \partial_t h + \alpha h \partial_x h + \gamma_1 \partial_x^3 h + \gamma_2 \partial_x^5 h \right) = \\ = - (c_A / 2) \Delta_\perp h. \end{aligned} \quad (8)$$

Характер дисперсии при этом определяется соотношением знаков дисперсионных коэффициентов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Имеют место следующие случаи (рис. 7):

–  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 < 0$  (область В) – случай отрицательной дисперсии;

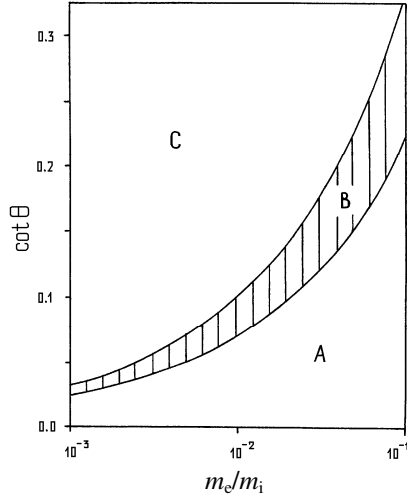


Рис. 7. Характер дисперсии для БМЗ-волн в зависимости от угла  $\theta$  и отношения  $m_e/m_i$

–  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$  (область А) и  $\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0$  (область С) – случаи «смешанной» дисперсии.

Сформулируем следующую задачу.

Пусть имеется 3D-стационарный пучок БМЗ-волн, распространяющийся в плазме под углом к магнитному полю вблизи конуса  $\theta = \arctan(m_i/m_e)^{1/2}$ . Выполняя масштабные преобразования в уравнении (8), осуществим переход к граничной задаче:

$$\partial_i (\partial_x h + 6h \partial_i h - \varepsilon \partial_i^3 h - \lambda \partial_i^5 h) = \Delta_{\perp} h, \quad (9)$$

где  $\Delta_{\perp} = \partial_{\rho}^2 + (1/\rho) \partial_{\rho}$  (аксиально-симметричная геометрия). Задача (9) решалась численно [Белашов, 1997] с условием на границе  $x=0$ :

$$h_0 = h(t, 0, \rho) = \cos(mt) \exp(-\rho^2),$$

т. е. был задан гармонический по времени и ограниченный в поперечном направлении пучок БМЗ-волн. Основные численные результаты представлены на рис. 8. Видно, что в областях углов В и С при распространении наблюдается рассеяние «магнитного звука», в области А вначале происходит подфокусировка пучка, затем, вследствие нелинейного насыщения, наблюдается его некоторая дефокусировка, а затем эволюция приводит к формированию устойчивого стационарного пучка БМЗ-волн, т. е. 3D-солитона БМЗ. Отметим, что такое явление в стандартной модели КП не наблюдается, и только учет более тонких дисперсионных эффектов позволил его впервые обнаружить.

На рис. 9 показано решение задачи эволюции пучка БМЗ-волн, отвечающее стадии максимума его амплитуды, где можно наблюдать постепенное отставание «крыльев» пучка в процессе эволюции от его главного максимума и затем – их «схлопывание» с формированием локализованной позади максимума кольцевой структуры БМЗ.

### Уравнения Эйлера и динамика вихревых структур

В качестве исходных рассмотрим уравнения Эйлера:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

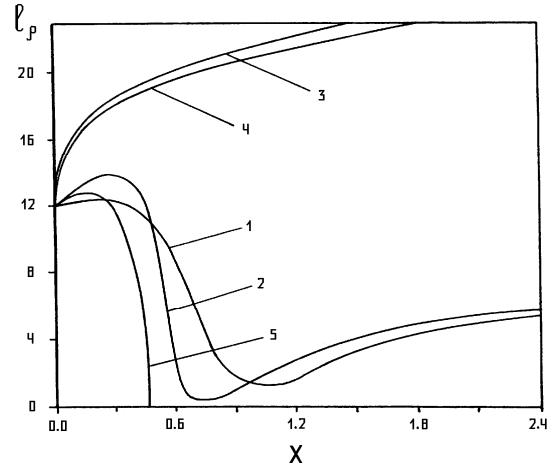


Рис. 8. Изменение поперечного сечения пучка БМЗ-волн при его распространении вдоль оси X.

где  $\nu$  – кинематическая вязкость. Для исследования вихревого движения, исключая давление  $p$  и вычисляя  $\text{rot}$ , переходим к уравнению переноса для плотности  $\rho$  и к уравнению Пуассона для функции тока  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + (\mathbf{v} \nabla) \rho &= \nu \nabla^2 \rho, & \Delta \psi - f &= -\rho, \\ \mathbf{v} &= B^{-1} [\nabla, \psi \mathbf{e}_z], & \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) описывают сплошную среду (невязкая несжимаемая жидкость) или квазичастицы (заряженные нити, вытянутые вдоль однородного поля  $\mathbf{B}$ ) с кулоновским взаимодействием.

Смысл входящих в (10) переменных зависит от типа среды. Для моделирования нами использовался модифицированный метод контурной динамики, развитый в [Белашов, 2003].

На рис. 10 приведен пример моделирования генерации и эволюции синоптического вихря в сравнении со спутниковым снимком такого вихря. Видно, что результат моделирования хорошо отражает

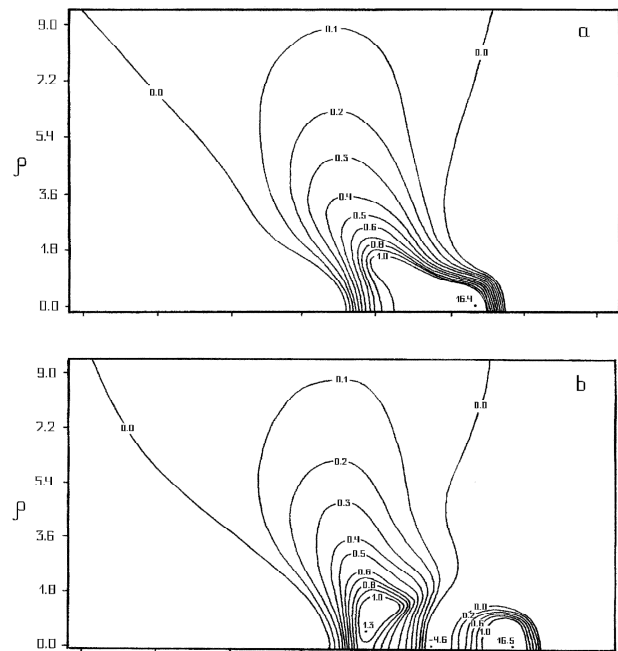


Рис. 9. Решение в плоскости  $(x, \rho)$ , отвечающее стадии максимума амплитуды.



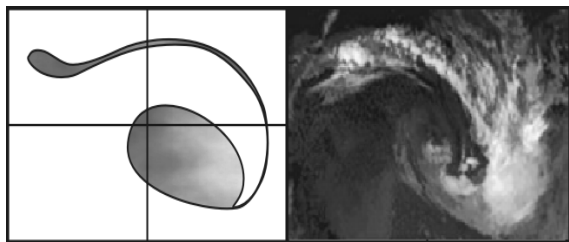


Рис. 10. Моделирование эволюции синоптических вихрей циклонического типа (численный эксперимент и спутниковая фотография).

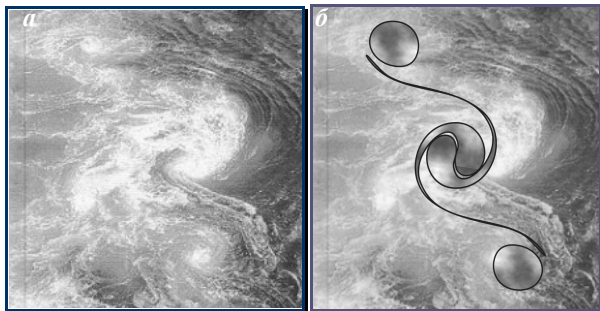


Рис. 11. Моделирование 4-вихревого взаимодействия в канале Naruto (Япония) (численный эксперимент и аэрофото-съемка).

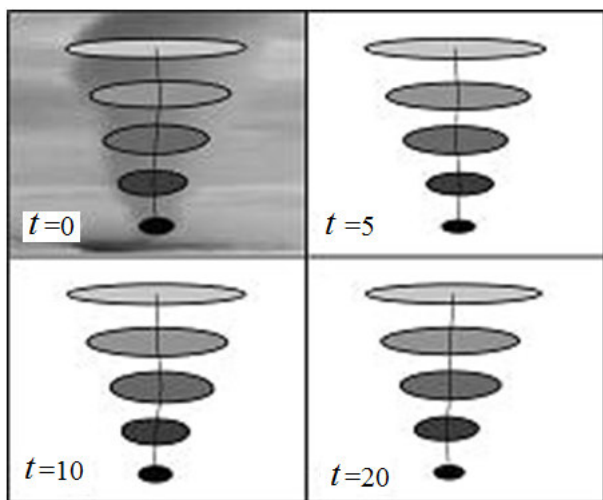


Рис. 12. Моделирование эволюции вихря торнадо.

основные свойства эволюции, включая образование вихревой пелены циклонального образования. На рис. 11 приведен пример моделирования взаимодействия вихревых образований в жидкости в сравнении с реальной ситуацией, отображенной на кадре аэрофотосъемки. Отчетливо видно, что результатом 4-вихревого взаимодействия является образование сложной структуры, к которой ядро системы состоит из двух внутренних вихрей начальной их цепочки. Также хорошо видны образующиеся межвихревые пелены, соединяющие вихри системы.

Рисунок 12 иллюстрирует (в сравнении с реальным фотоснимком) результаты моделирования эволюции торнадо при использовании квазидвумерного подхода с послойной аппроксимацией трехмерной вихревой структуры системой вихревых образований конечной площади [Белашов, 2003]. Их рисунка видно, что малые поперечные возмущения оси торнадо приводят к слабым колебаниям оси и, в целом, не

вливают на структуру и устойчивость вихря. Таким образом, используя принятый в [Белашов, 2003] подход, мы можем прогнозировать эволюцию торнадо и моделировать взаимодействие вихрей такого типа.

В качестве интересных приложений наших исследований динамики вихревых структур могут быть рассмотрены, например, следующие:

- гидро- и аэродинамика: формирование завихренности и вихревых цепочек при обтекании твердых тел потоками газа и жидкости;
- моделирование образования и эволюции вихревых структур в астрофизике (спиральная структура галактик, солнечная вспышечная активность – магнитные петли и магнитные трубки в солнечной короне);
- проблема магнитного удержания и управляемого термоядерного синтеза;
- спиральные и вихревые движения в плазме (в приложениях, относящихся к плазменным технологиям).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Белашов В.Ю. Уравнение КП и его обобщения. Теория, Приложения. Магадан: СВКНИИ ДВО РАН, 1997. 162 с.  
 Белашов В.Ю. Неоднородные нелинейные волны в реальных средах. Казань: КГЭУ, 2002. 143 с.  
 Белашов В.Ю., Сингатулин Р.М. Алгоритм метода контурной динамики и моделирование вихревых структур. Казань: КГЭУ, 2003. 39 с. Деп. ВИНТИ 11.02.2003 г., № 272-B2003.  
 Белашова Е.С., Белашов В.Ю. Солитоны как математические и физические объекты. Казань: КГЭУ, 2006. 205 с.  
 Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag GmbH & Co, 2005. 303 p.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань