УДК 530.12

ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС С КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ

Е.М. Коптева

GRAVITATIONAL COLLAPSE WITH THE COSMOLOGICAL CONSTANT

E.M. Kopteva

В работе построена модель пылевого шара в пустом пространстве с ненулевой космологической постоянной. Получено точное решение обобщенной задачи Оппенгеймера–Снайдера. Показано, что наличие космологической постоянной проявляется на больших масштабах и не оказывает существенного влияния на процесс коллапса.

The model of a dust ball in the empty surrounding with nonzero cosmological constant is built. The exact solution for the generalized Oppenheimer-Snyder is found. It is shown that the cosmological constant does not prevent the gravitational collapse but influences the dynamics of the dust ball on the very large scales.

Введение

Благодаря новым возможностям современной наблюдательной космологии значения космологических параметров, таких как плотность энергии различных типов материи во Вселенной, постоянная Хаббла, параметр замедления, могут быть определены с достаточной степенью точности. Результаты последних наблюдений [1] свидетельствуют, в частности, о том, что пространственная кривизна нашего мира близка к нулю и что около 70 % всего вещества во Вселенной представляет собой неизвестную форму материи, которую сейчас принято называть «темной энергией». Весьма вероятным кандидатом на роль источника «темной энергии» является космический вакуум, любой вклад в тензор энергии–импульса которого действует в точности как космологическая постоянная [2]. Таким образом, внимание космологов снова обратилось к космологической постоянной Λ.

С классической точки зрения, наличие ненулевой космологической постоянной эквивалентно действию во Вселенной силы гравитационного отталкивания. В этой связи вызывает интерес изучение гравитационного коллапса с $\Lambda \neq 0$. Не станет ли существование пусть даже малой силы гравитационного отталкивания причиной существенных изменений в процессе коллапса или вообще его невозможности?

Гравитационный коллапс при ненулевой космологической постоянной рассматривался во многих работах, например [3–5]. Однако рассмотрение носило в основном качественный характер. Задачей данной работы является получение точных аналитических решений уравнений Эйнштейна для рассматриваемого случая и исследование их свойств.

1. Задача Оппенгеймера–Снайдера с учетом $\Lambda\neq 0$

В 1939 г. Оппенгеймером и Снайдером [6] было предложено решение уравнений Эйнштейна для пылевой конфигурации в пустом пространстве с нулевой пространственной кривизной. Оно состоит из двух метрик, сшитых по поверхности пылевой конфигурации. Обе метрики в синхронной системе координат описываются сферически-симметричным интервалом вида

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{r'^2(R,t)}{f^2(R)} dR^2 - r^2(R,t) d\sigma^2,$$

где $r(R, t)$ – так называемый «радиус», выбранный таким образом, чтобы $2pr$ было длиной окружности с центром в начале координат, штрих означает дифференцирование по R, $f^2(R)$ – произвольная функция интегрирования, которая представляет собой полную энергию частицы, находящейся в заданном слое R, в безразмерных единицах, $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Причем внутренним решением (*in*) служит параболический тип решения Фридмана для однородного изотропного распределения пыли, внешнее же пространство (*out*) описывается решением Шварцшильда в синхронной системе координат.

В случае ненулевой космологической постоянной для описания внутреннего и внешнего решений нужно использовать обобщенные решения Фридмана и Шварцшильда соответственно:

$$r_{in}(R,t) = \left[a_\Lambda \sqrt{m_T^{in}(R)} \sinh \frac{3}{2a_\Lambda} c(t_0^{in} - t) \right]^{\frac{2}{3}}; \qquad (1)$$

$$r_{out}(R,t) = \left[a_\Lambda \sqrt{m_T^{out}(R)} \sinh \frac{3c}{2a_\Lambda} (t_0^{out}(R) - t) \right]^{\frac{2}{3}},$$

где $a_\Lambda \equiv \sqrt{3/\Lambda}$, $t_0(R)$ – произвольная функция интегрирования, определяющая время начала коллапса, $m_T^{in}(R) = a_0 R^3$, $m_T^{out}(R) = r_g$ – толменовские составляющие внутренней и внешней массовых функций, r_g – гравитационный радиус. Для того чтобы эти решения действительно описывали пылевой шар, находящийся в пустом пространстве, они должны быть сшиты по поверхности шара $R = R_b$.

Для сшивки двух метрик будем использовать условия сшивки Лихнеровича–Дармуа [7], которые заключаются в том, что коэффициенты первой квадратичной формы для метрик (in) и (out) на поверхности сшивки совпадают и коэффициенты второй квадратичной формы для обеих метрик на поверхности сшивки совпадают.

Можно показать, что для рассматриваемых решений (1) условия сшивки сводятся к следующим равенствам: $m_T^{in}(R_b) = m_T^{out}(R_b)$, $t_0^{in} = t_0^{out}(R_b)$. Отсюда сразу следует, что $m_T^{in}(R) = r_g \frac{R^3}{R_b^3}$. Постоянную t_0^{in} выберем таким образом, чтобы в пределе $\Lambda \to 0$

полученное решение переходило в обычное решение Оппенгеймера–Снайдера: $ct_0^{in} = \frac{2}{3} R_b^{3/2} r_g^{-1/2}$, а произвольную функцию интегрирования $t_0^{out}(R)$, соответственно $ct_0^{out}(R) = \frac{2}{3} R^{3/2} r_g^{-1/2}$. Тогда окончательно после сшивки имеем для пыли

$$r_{in}(R,t) = \frac{R}{R_b}\left[a_\Lambda \sqrt{r_g}\,\sinh\frac{R_b^{3/2}}{a_\Lambda\sqrt{r_g}}(1-\frac{3}{2}\sqrt{r_g}R_b^{-3/2}ct)\right]^{\frac{2}{3}},$$

и для окружающей пустоты

$$r_{out}(R,t) = \left[a_\Lambda \sqrt{r_g}\,\sinh\frac{R^{3/2}}{a_\Lambda\sqrt{r_g}}(1-\frac{3}{2}\sqrt{r_g}R^{-3/2}ct)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Полученные выражения являются решением задачи Оппенгеймера–Снайдера, обобщенной на случай ненулевой космологической постоянной.

2. Гравитационный коллапс пылевого шара

Метрика для сферически-симметричного гравитационного поля в пустом пространстве с Λ-членом впервые была получена в 1918 г. Коттлером [8]. Метрический интервал для решения Шварцшильда–Коттлера в системе координат кривизн имеет вид

$$ds^2 = \left[1-\frac{r_g}{r}-\frac{r^2}{a_\Lambda^2}\right]c^2 d\tau^2 - \\ -\left[1-\frac{r_g}{r}-\frac{r^2}{a_\Lambda^2}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\sigma^2. \qquad (2)$$

Как известно, в синхронной системе координат координатная особенность $r = r_{hor}$ отсутствует. Следовательно, частицы достигают горизонта событий $r_{hor} \neq 0$ за конечное время, и затем продолжается неограниченное сжатие. Время τ для бесконечно удаленного наблюдателя (система координат Шварцшильда) связано с собственным временем t движущихся частиц соотношением:

$$\tau = \int_{-t_\infty}^{t}\left[1-\frac{r_g}{r_{out}}-\frac{r_{out}^2}{a_\Lambda^2}\right]^{-1} dt, \qquad (3)$$

где t_∞ – время начала падения частицы.

Для того чтобы оценить взаимосвязь между t и τ, необходимо исследовать подынтегральную функцию, которая фактически представляет собой коэффициент при dr^2 решения Шварцшильда–Коттлера (2), традиционно обозначаемый e^λ. Известно, что границы R-T-областей пространства–времени, или горизонты событий, могут быть найдены из условия $e^{-\lambda} = 0$. Для удобства исследования функции e^λ произведем следующую замену: $x \equiv \frac{r}{r_g}$; $\kappa^2 \equiv \frac{a_\Lambda^2}{r_g^2}$. Тогда $e^{-\lambda} = -\frac{1}{\kappa^2 x}(x^3 - \kappa^2 x + \kappa^2)$. Кубический трехчлен в скобках имеет три различных действительных корня при условии $\kappa^2 < 27/4$. Положительное значение из трех имеют только два корня, которыми и определяются границы R-T-областей.

Значения параметра κ^2 для объектов нашего мира довольно велики. Например, для нашей Галактики $r_{g_{Gal}} \approx r_{g_{Sun}} \cdot 10^{11} = 4\cdot 10^5 \cdot 10^{11} = 4\cdot 10^{16}$ см. $a_\Lambda = 1.5 \cdot 0^{28}$ см, следовательно, $\kappa^2 = 1.4 \cdot 10^{23}$. При таких больших κ^2 возможно получить приближенные значения корней исследуемого трехчлена. Эти значения равны: $r_1 \approx -r_g\kappa$, $r_2 \approx r_g$, $r_3 \approx r_g\kappa$.

Как известно, в решении Шварцшильда существует всего один горизонт событий $r = r_g$, разделяющий две области: T-область при $r < r_g$, и R-область при $r > r_g$. В T-области статический наблюдатель не возможен, а в R-области как раз реализуется наш мир.

Учет космологической постоянной приводит к тому, что в пространстве Шварцшильда–Коттлера областей становится три: при $r < r_2$ реализуется T-область; значениям r из интервала $r_2 < r < r_3$ соответствует R-область; и при $r < r_3$ снова имеет место T-область. Для пространства–времени, порождаемого нашей Галактикой, $r_3 \approx 3.74 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{16} = 1.497 \cdot 10^{28}$ см, что как раз составляет сегодняшние размеры нашей Вселенной. Для наблюдателя, находящегося в R-области и наблюдающего коллапс пылевого шара, наибольший интерес представляет горизонт событий $r = r_2$. Поэтому верхним пределом интегрирования в (3) должно быть время достижения данного горизонта событий t_{hor}. Для значения $r_2 = r_g$ горизонт будет достигнут частицами из слоя R за время t_{hor}, равное $t_{hor} = \frac{2}{3}\frac{R^{3/2}}{c\sqrt{r_g}} - \frac{2a_\Lambda}{3c}\operatorname{arcsinh}\frac{r_g}{a_\Lambda}$. Это время конечно для любого конечного R.

Проинтегрируем (3) в приближении $r \to r_2$ ($t \to t_{hor}$). Для этого представим интеграл (3) в виде суммы трех интегралов. При интегрировании в заданном приближении особенность будет содержаться только в одном слагаемом, пропорциональном

$$\int \frac{dt}{r - r_2}, \qquad (4)$$

Здесь r представляет собой внешнее решение в обобщенной задаче Оппенгеймера–Снайдера. Подставляя выражение для r и интегрируя (4) в соответствующих пределах, получим особенность для времени бесконечно удаленного наблюдателя:

$$\tau \sim \ln\left|\frac{\sqrt{r}-\sqrt{r_2}}{\sqrt{r}+\sqrt{r_2}}\right|\Bigg|_{r\to r_2}.$$

Это означает, что вблизи горизонта событий $r = r_2$ в решении Шварцшильда–Коттлера, как и в решении Шварцшильда при $r \to r_g$, конечному времени t_{hor} в синхронной системе координат соответствует бесконечное время τ в системе координат кривизн.

Таким образом, несмотря на то, что наличие космологической постоянной приводит к отталкиванию, этот эффект проявляется на больших масштабах и не влияет на процесс гравитационного коллапса.

Аналогичным образом, анализируя особенность при $r = r_3$, получим, что для наблюдателя, находящегося в R-области, частицы не уходят на бесконечность, как это было в решении Шварцшильда, а достигают горизонта $r = r_3$ за бесконечное время, тогда как в сопутствующей системе отсчета время пресечения горизонта $r = r_3$ конечно и частицы, попадая в T-область, где не существует статического состояния, улетают в бесконечность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spergel D. N., et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology / E-print astro-ph/0603449. 2006. V. 1.

2. Чернин А.Д. Космический вакуум // УФН. 2001. Т. 171. № 11. С. 1153–1175.

3. Oppenheimer J.R., Snyder H. On continued gravitational contraction // Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 455–459.

4. Markovic D., Shapiro S. L. Gravitational Collapse with a Cosmological Constant / E-print gr-qc/9912066. 2004.

5. Beig R., Heinzle J.M. CMC-Slicings of Kottler-Schwarzschild-de Sitter Cosmologies / E-print gr-qc/0501020.

6. Oppenheimer J.R., Snyder H. On continued gravitational contraction // Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 455–459.

7. Bonnor W.B., Vickers P.A. Junction conditions in general relativity // Gen. Rel. Grav. 1981. V. 13. P. 29–36.

8. Kцttler F. The physical basics of Einstein's theory of gravitation // Ann. Phys. (Leipzig). 1918. V. 56. P. 401–462.

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск