

УДК 539.1

О СВЯЗИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ПО ПОПЕРЕЧНОМУ ИМПУЛЬСУ И ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ПАРАМЕТРУ ВЫЛЕТА ДЕТЕКТИРУЕМОЙ ЧАСТИЦЫ

²Н. Бобровская, ¹М. Поляков, ²А.Н. Валл, ³А.А. Владимиров

CRYSTALLIZATION OF EXTREMELY-DILUTED TWO-COMPONENT SYSTEM OF HARD SPHERES

²N. Bobrovskaya, ¹M. Polyakov, ²A.N. Vall, ³A.A. Vladimirov

В рамках формализма алгебры $SO_{\mu}(2, 1)$ получена и проанализирована связь между дифференциальным сечением рождения частицы C по поперечному импульсу и дифференциальным сечением по пространственному параметру \vec{b} , характеризующему координаты области рождения частицы C . Это распределение тесно связано с пространственной структурой взаимодействующих частиц и допускает наглядную физическую интерпретацию. Показано, что при рассеянии в заднюю полусферу область больших поперечных импульсов дает основной вклад в функцию распределения по b в интервале $1/2 \leq bq \sim 1$, где q – импульс частицы C . Левая граница неравенства определяется соотношением неопределенности Гейзенберга по переменным импульс–радиус области локализации. Пространственная структура области рождения в плоскости перпендикулярного импульса представляет собой набор дискретных аксиально-симметричных (для бесспиновых частиц C) зон. На примере модели со степенным падением формфактора при больших передачах импульса показано, что число зон совпадает с числом конститuentов мишени. Полученная связь между сечениями по \vec{q}_{\perp} и \vec{b} является точной и не связана с определенной моделью, поэтому возникает возможность анализировать пространственную структуру мишени на основе экспериментальных данных по угловым распределениям частицы C . В приложении рассмотрен процесс $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ при энергии фотона $E_{\gamma} = 5$ ГэВ.

In the frame of algebra $SO_{\mu}(2, 1)$ formalism the connection between particle C creation differential cross-section in transversal momentum and differential cross-section in spacial parameter \vec{b} , which define the particle C creation area coordinates is received and analyzed. This distribution is germane with interacting particles spatial pattern and allows an illustrative physical interpretation. It is shown, that on backward half-sphere scattering the area of large transversal momentum gives the main contribution to accumulated distribution in b in interval $1/2 \leq bq \sim 1$, where q is particle C momentum. Left verge of inequality is determine by uncertainty principle in variables “momentum-radius of localization area”. Spatial pattern of creation area in plane of vertical momentum is represent the set of digital axially-symmetric zones (for less spin particles C). By the example of model of power incidence form factor of large transmission momentum is shown, that the number of zones is agree with the number of target constituents. The received connection between the \vec{q}_{\perp} and \vec{b} cross-sections is exact and is not connected with defined model, therefore the opportunity to analyze the spatial pattern of target on basis of experimental angular distribution of particle C data is appear. The process $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ with photon energy $E_{\gamma} = 5$ GeV is regarded as supplement.

Определение вектора максимального сближения

Рассмотрим классическую траекторию свободной бесспиновой частицы, которая движется с произвольными начальными условиями (рис. 1).

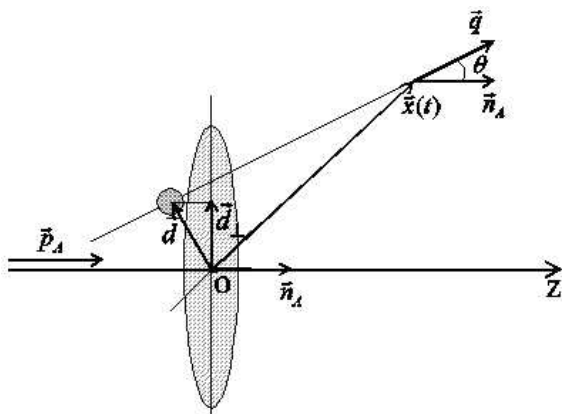


Рис. 1. Классическая траектория $\vec{X}(t)$ асимптотически свободной частицы с импульсом \vec{q} , продолженная в область реакции, характеризуется минимальным расстоянием \vec{d} от выбранной точки O . В лабораторной системе координат (л.с.к.) эта точка соответствует центру мишени, в системе центра масс (с.ц.м.) – месту встречи пучков.

Траектория $\vec{X}(t)$ имеет вид:

$$X_i(t) = \frac{q_i}{\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}}(t - t_0) + \xi_i, \quad I = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где \vec{q} – импульс частицы, m – ее масса. Расстояние между частицей и началом координат O равно

$$D(t) = (\vec{X}(t) \vec{X}(t))^{\frac{1}{2}}.$$

В какой-то момент времени $t = \tau$ расстояние $D(\tau)$ будет иметь минимальное значение. Время τ определяется экстремальным условием:

$$\left. \frac{d}{dt} D(t) \right|_{t=\tau} = \frac{1}{D(t)} \left(X_i(t) \frac{d}{dt} X_i(t) \right) \Big|_{t=\tau} = 0. \quad (2)$$

С учетом (1) получим:

$$\tau = t_0 - \frac{(\vec{u} \vec{\xi})}{u^2}, \quad (3)$$

$$u_i = \frac{q_i}{\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}}.$$

Подставляя $t = \tau$ в $D(t)$, мы получаем выражение для компонент вектора максимального сближения d_i :

$$d_i = X_i(\tau) = -\frac{u_i}{u^2} (\vec{u} \vec{\xi}) + \xi_i. \quad (4)$$

Если ввести орбитальный момент $L_k, k = 1, 2, 3$,

$$L_k = \varepsilon_{kim} \xi_l q_m, \quad (5)$$

то выражение (4) можно преобразовать к другому виду:

$$d_i = \frac{1}{q^2} \varepsilon_{ijk} q_j L_k = \frac{1}{q^2} M_{ij} q_j. \quad (6)$$

Таким образом, каждой классической траектории $\bar{X}(t)$ асимптотически свободной частицы, вылетающей из области реакции с импульсом \vec{q} , можно сопоставить вектор \vec{d} – вектор максимального сближения траектории с точкой О. Мы будем интерпретировать его как эффективные координаты области рождения частицы. Это координаты эффективные, поскольку они получены продолжением свободной траектории в область реакции, где она естественно искажается или вообще исчезает.

Квантование величин d_i приводит к следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{1}{q^2} (\varepsilon_{ijk} q_j L_k - i q_i), \\ d_i &= (d_i)^+, \quad [d_i, q^2] = 0, \\ [L_i, d_j] &= i \hbar \varepsilon_{ijk} d_k, \\ [L_i, L_j] &= i \hbar \varepsilon_{ijk} L_k, \\ [d_i, d_j] &= \frac{-i \hbar}{q^2} \varepsilon_{ijk} L_k, \\ [d_i, q_j] &= i \hbar \delta_{ij} - \frac{i \hbar}{q^2} q_i q_j, \\ [d_i, q_j q_k] &= i \hbar \delta_{ij} q_k + i \hbar \delta_{ik} q_j - \frac{2i \hbar}{q^2} q_i q_j q_k, \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда следует, что операторы d_i и L_j на сфере $q^2 = const$ образуют алгебру SO(3, 1).

Пространство Фока на группе SO_μ(2, 1)

Рассмотрим теперь процесс, когда одна из частиц рождается в состоянии с определенным пространственным параметром $\vec{\mu}$, с определенной энергией E_q и с определенным знаком проекции импульса на выбранную ось z . Обозначим это состояние как $|\vec{\mu}, q, \varepsilon\rangle$; $\varepsilon = \pm 1$ – знак проекции (8)

Аналогично этому введем состояние с определенным значением перпендикулярного импульса \vec{q}_\perp , с определенной энергией E_q и с определенным знаком проекции импульса на выбранную ось z . Обозначим его как

$$|\vec{q}\rangle^\pm = |\vec{q}_\perp, q_3 = \pm \sqrt{q^2 - q_\perp^2}\rangle. \quad (9)$$

Здесь между состояниями (8) и (9) на сфере $q^2 = const$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\langle \vec{q}_\perp, \varepsilon \sqrt{q^2 - q_\perp^2} | = \int \xi(\vec{q}_\perp, \vec{\mu}) \langle \vec{\mu}, q, \varepsilon | d\Omega_{\vec{\mu}}, \quad (10)$$

$$\langle \vec{\mu}, q, \varepsilon | = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\xi}(\vec{q}_\perp, \vec{\mu}) \langle \vec{q}_\perp, \varepsilon \sqrt{q^2 - q_\perp^2} | d\Omega_{\vec{q}},$$

основанное на соотношениях полноты и ортогональности функций $\xi(\vec{q}_\perp, \vec{\mu})$.

Дифференциальное сечение по пространственному параметру \vec{b} в с.с.м. частиц А и В

Теперь рассмотрим случай, когда частица С рождается в состоянии $|\vec{\mu}, q, \varepsilon\rangle$. Выбирая для состояния $|out\rangle$ соответствующий базис, получим для полного числа событий рождения частиц С и D следующее представление:

$$N = (2\pi)^2 \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int d\vec{q}_\perp q^2 dq d\Omega_{\vec{\mu}} |\langle \vec{\mu}, q, \varepsilon; \vec{q}_\perp | \hat{F} | in \rangle|^2. \quad (11)$$

Если начальное состояние задано в с.с.м., тогда \vec{q} не зависит от угла рассеяния и в этом случае для дифференциального распределения по $\vec{\mu}$ получаем

$$\frac{dN^\pm}{d\Omega_{\vec{\mu}}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \kappa(\mu) \text{Re} \int d\Omega_{\vec{q}} \bar{\xi}(\vec{q}_\perp, \vec{\mu}) \frac{dN^\pm}{d\Omega_{\vec{q}}}, \quad q = \vec{q}, \quad (12)$$

где

$$\vec{q}^2 = \frac{(s + m_C^2 - m_D^2)^2}{4s} - m_C^2.$$

Распределению по \vec{b} получается отсюда с помощью соотношений между μ и b :

$$\mu = \left(b^2 q^2 - \frac{1}{4} \right)^{1/2}, \quad d\Omega_{\vec{\mu}} = q^2 th(\pi\mu) d\vec{b}, \quad d\vec{\mu} = \mu d\mu d\varphi,$$

$$d\vec{b} = b db d\varphi. \quad (13)$$

Соответственно для дифференциальных сечений:

$$\frac{d\sigma^\pm}{d\Omega_{\vec{\mu}}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \kappa(\mu) \text{Re} \int d\Omega_{\vec{q}} \bar{\xi}(\vec{q}_\perp, \vec{\mu}) \frac{d\sigma^\pm}{d\Omega_{\vec{q}}}, \quad (14)$$

$$\frac{d\sigma^\pm}{d\Omega_{\vec{q}}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{q^2 \lambda(\vec{q}_\perp)}{n_1 n_2 |\vec{\mu}|} |A^{(\varepsilon)}(\vec{q})|^2,$$

$$\lambda(\vec{q}_\perp) = \frac{q E_q E_D}{q^2 P^0 - (\vec{q} \cdot \vec{P}) E_q},$$

$$E_D = \sqrt{(\vec{q} - \vec{P})^2 + m_D^2}.$$

Здесь везде $q = \vec{q}$. Матричный элемент \hat{A} связан с \hat{S} -матрицей соотношением

$$\langle f | S | in \rangle = \langle f | in \rangle + i \delta^{(4)}(q_f - q_{in}) \langle f | \hat{A} | in \rangle.$$

Теперь проинтегрируем $\frac{d\sigma^\pm}{d\Omega_{\vec{\mu}}}$ в (14) по направлению вектора $\vec{\mu}$. Получим

$$\frac{d\sigma^\pm}{d\mu} = \frac{1}{2\pi} \mu th(\pi\mu) \kappa(\mu) \int d\Omega_{\vec{q}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}} P_{\frac{1}{2} + i\mu} \left(\frac{q}{\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}} \right) \frac{d\sigma^{\pm}}{d\Omega_{\bar{q}}} \right\}. \quad (15)$$

Приложение к простейшим моделям $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ в

с.ц.м. частиц А и В

В качестве примера рассмотрим одночастичный обмен в t -канале. Соответствующее сечение как функция u_0 имеет полюсной вид:

$$\frac{d\sigma^{\pm}}{d\Omega_{\bar{q}}} \sim u_0^2 \left(u_0 \mp \frac{1}{z_0} \right)^{-2}, \quad (27)$$

где $z_0 = 1 + \frac{M^2}{2p^2}$, M – масса обменной частицы, а p^2

– импульс частицы А.

Интеграл с таким сечением вычисляется аналитически. Его численный расчет приведен на графике рис. 2.

Как показывает анализ полученного сечения, плоскость \vec{b} делится на зоны с радиусами R_0, R_1 и R_2 (рис. 3).

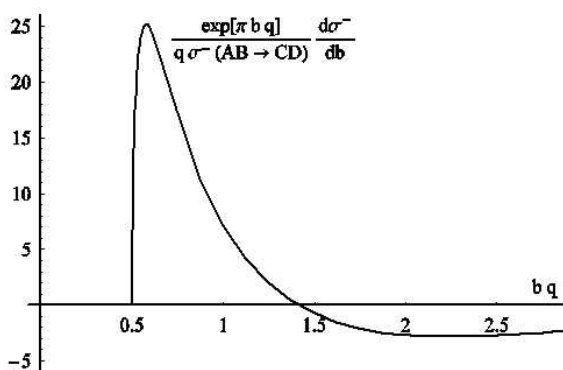


Рис. 2. Функция распределения по b в модели одночастичного обмена. $bd < 1/2$ – область, запрещенная соотношением неопределенности, $1/2 < bq \lesssim \sqrt{2}$ – область рождения частиц С, $bq \gtrsim \sqrt{2}$ – область поглощения частиц С, $z_0 = 1.001$.

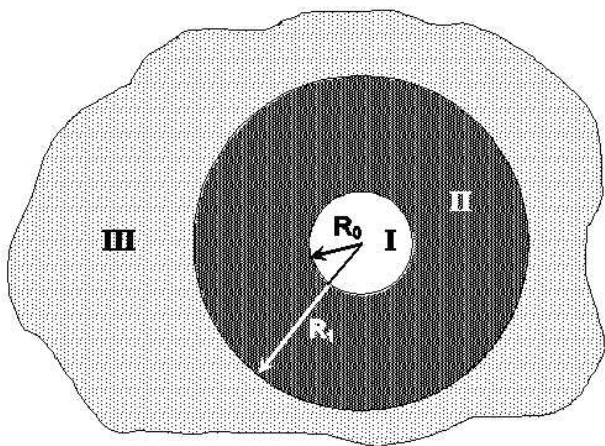


Рис. 3. Зонная структура в плоскости \vec{b} в модели одночастичного обмена. Зона I – область, запрещенная соотношением неопределенности, зона II – область рождения частиц С, зона III – область поглощения частиц С.

Здесь $R_0^2 = \hbar^2/4q^2$ определяет границу запрещенной области, в которой нарушается соотношение неопределенности Гейзенберга (фазовый объем частицы С меньше допустимого). Область $R_0 < b < R_1$ определяет пространственную область рождения частиц С. Наконец, область $b > R_1$ – это область, в которой происходит поглощение части рожденных частиц С. При этом, если считать условно, что в области $R_0 < b < R_1$ интенсивность распределения $I(b) \sim 1$, то в области $R_1 > b$ интенсивность $\sim 10^{-5}$. Это обусловлено тем, что экспоненциальное падение $I(b)$ в задней полусфере определяется радиусом $R \sim 1/q$, т.е. $I(b) \sim \exp(-pbq)$ при $bq \gg 1$.

Заключение

Таким образом, в работе получено точное соотношение между дифференциальным сечением по импульсу детектируемой частицы С и функцией распределения по пространственному параметру вылета этой частицы из области взаимодействия. Эта функция описывает распределение вещества в мишени и позволяет понять природу ее составных частей на адронных масштабах. На простых моделях показано, что область взаимодействия разделяется на зоны рождения и поглощения частиц С. Проанализированы особенности рассмотрения в с.ц.м. и в л.с.к. и получены соответствующие выражения для дифференциального сечения по b .

Получено обобщенное распределение в плоскости (b, q) , из которого следуют дифференциальное сечение по углу рассеяния, дифференциальное сечение по параметру вылета b и условие нормировки. В приложении рассмотрен реальный процесс фоторождения π^0 на протоне и сделаны оценки основных характеристик пространственного распределения.

При получении связи между сечениями была использована только полнота состояний $|\vec{\mu}, q, \epsilon\rangle$ в одночастичном пространстве Фока.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-5362.2006.2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogolubov N.N., Shirkov D.V. Introduction to the Theory of Quantized Fields, Chichester: Wiley-InterScience, 1980.
2. Polyakov M.V., Vall A.N., Vladimirov A.A. hep-ph 0273 2007.
3. Гольданский, Никитин, Розенталь, Кинематические методы в физике высоких энергий, (1987)
4. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals, Series, and Functions, Pergamon, New York, (1964).
5. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions V. 2. New York: McGraw-Hill, 1953.
6. Collins P.D.B. An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics. Cambridge University Press, 1977.
7. Wigner E.P. // Phys.Rev. 1932. V. 40. P. 749.
8. Carruthers P., Zachariasen F. // Rev.Mod.Phys. 1983. V. 55, N 1. P. 283.

¹Институт теоретической физики, Бохум, Германия
²Иркутский государственный университет, Иркутск
³Объединенный институт ядерных исследований, Дубна